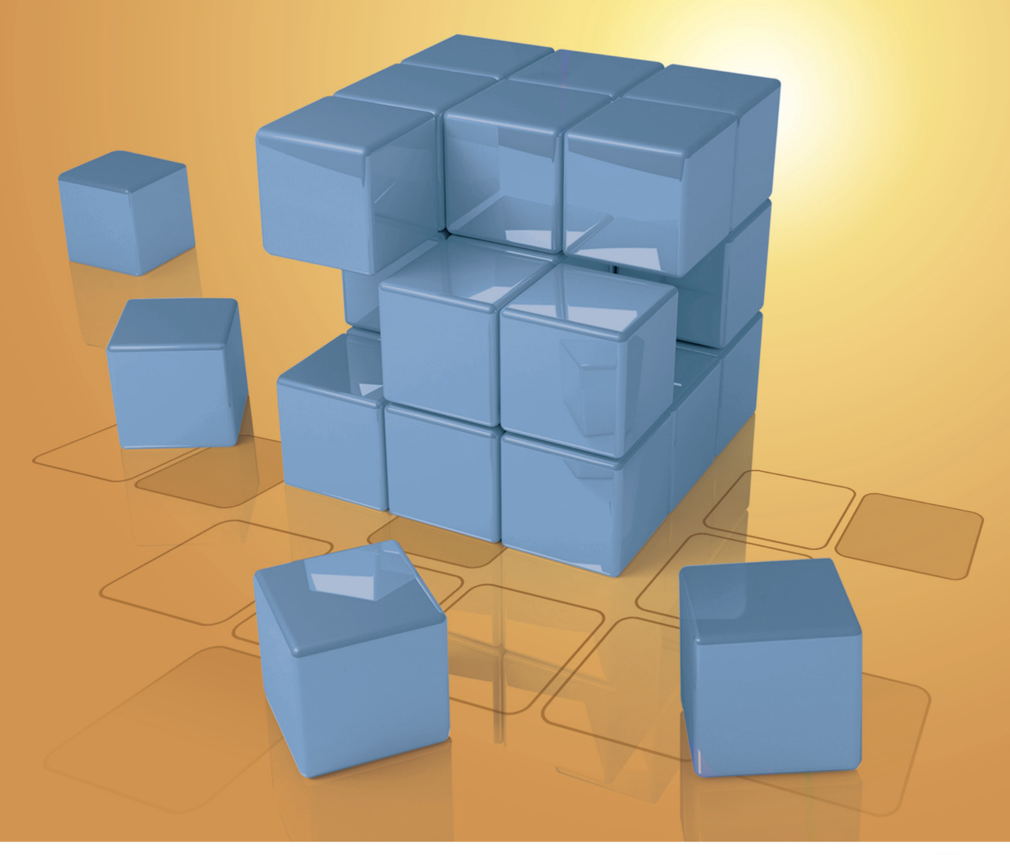
Trigonometría

Actividades

Tercer grado de Secundaria









Trigonometría
Libro del actividades
Tercer grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Josué Dueñas Leyva / Christian Yovera López
Marcos Pianto Aguilar / Julio Julca Vega
Óscar Díaz Huamán / Kristian Huamán Ramos
Saby Camacho Martinez / Eder Gamarra Tiburcio
Jhonatan Peceros Tinco

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Lourdes Zambrano Ibarra / Natalia Mogollón Mayurí
Roger Urbano Lima

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 15 000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2013-11995
ISBN: 978-612-313-056-5
Registro de Proyecto Editorial N.º 31501001300690

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, Lima, S.J.L.
RUC 10090984344

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344



Contenido


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 1
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría

RECUERDA

La trigonometría

El término trigonometría proviene de las palabras griegas: *trigono* y *metron*, que quieren decir: triángulo y medida respectivamente. Sin embargo, el estudio de la trigonometría no solamente está limitada a la medición de los triángulos, pues el campo de estudio de esta disciplina matemática se ha ido enriqueciendo progresivamente hasta llegar a ser un instrumento indispensable en el análisis matemático, en la física y en varias ramas de la ingeniería.

En los últimos 100 años, una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría a la matemática es la llamada trigonometría analítica. Gran parte del estudio de los fenómenos de onda y oscilatorios así como el comportamiento periódico, está relacionado estrechamente con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas.

La trigonometría se divide en:

a) Trigonometría plana: estudia la resolución de figuras geométricas en su sistema bidimensional de coordenadas.
b) Trigonometría esférica: estudia la resolución de triángulos esféricos en una esfera.
c) Trigonometría hiperbólica: con frecuencia se utilizan en diversas investigaciones físicas y técnicas, pero fundamentalmente su estudio es netamente matemático.

En el siglo XV fue desarrollada la trigonometría como una disciplina dentro de la matemática por Johann Muller (1436 - 1476). Este desarrollo creó un interés en la trigonometría por toda Europa y tuvo el efecto de colocar a este continente en una posición de prominencia con respecto a la astronomía y la trigonometría.

En el siglo XVII el aporte de Euler en el afianzamiento de la trigonometría como una ciencia totalmente autónoma fue decisivo, porque además de su trigonometría esférica, considera ya a los círculos máximos de la tierra como geodésicas y logra, además, la determinación trigonométrica de los sólidos geométricos regulares convirtiéndose en la más moderna versión de la ciencia trigonométrica.

Reflexiona

- *El verdadero heroísmo consiste en ser superior a los males de la vida.*
- *El hombre superior busca en sí mismo todo lo que quiere; el hombre inferior lo busca en los demás.*
- *El hombre superior se cultiva a sí mismo para ganar respeto propio. Si no está contento con esto, se perfecciona para hacer felices a otros y si aún no está contento con eso, continúa perfeccionándose para conferir paz y prosperidad a todo el mundo.*
- *Tener un ideal es tener una razón para vivir. Es también un medio para vivir una vida más amplia y más elevada.*

¡Razona...!

De las fichas que se muestran en la figura, ¿cuál de ellas debe retirarse y cuál debe invertirse, respectivamente, para que la suma de los puntos de la parte superior sea al cuádruple de la suma de los puntos de la parte inferior?

A) 2; 5 B) 5; 1 C) 4; 1 D) 1; 2 E) 3; 1

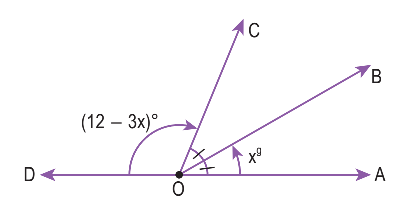


Aplicamos lo aprendido



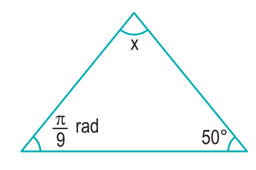
TEMA 1: SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

1 Del gráfico, calcula el valor de $(2x)^g$ en el sistema sexagesimal. $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz.



A) 120° B) 80° C) 48°
D) 72° E) 36°

2 En la figura, halla x.



A) 105° B) 110° C) 125°
D) 150° E) 85°

3 Un ángulo mide $\frac{\pi}{3}$ rad y su suplemento $(2x + 10°)$. ¿Cuál es el valor de x?

A) 50° B) 51° C) 52°
D) 54° E) 55°

4 Señala el equivalente de $\beta = \frac{\pi}{6}$ rad $- 30^g$ en el sistema sexagesimal.

A) 3° B) 6° C) 4°
D) 5° E) 9°

5 Un mismo ángulo es medido por dos personas.
Juan: encontró $(x - 1)°$
José: encontró $(x + 1)^g$
Calcula la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

6 Calcula x + y + z, si:
$x°\ y'\ z'' = 3°\ 36'\ 34'' + 2°\ 28'\ 42''$

A) 27 B) 29 C) 30
D) 28 E) 17

7 Simplifica:

$$E = \frac{6\pi C - 5\pi S + 20R}{\pi C - 40R}$$

Siendo S, C y R lo convencional.

A) 1 B) 4 C) 3
D) 5 E) 2

8 La suma de las medidas de dos ángulos es 60^g y la diferencia de las mismas es $\frac{\pi}{10}$ rad. Calcula la medida sexagesimal del ángulo mayor.

A) 36° B) 40° C) 20°
D) 70° E) 28°

9 Reduce:

$$E = \frac{1°}{1'} - \frac{1^g}{1^m} + \frac{1'}{1''} \cdot \frac{1^m}{1^s}$$

A) 1 B) 60 C) 100
D) 6040 E) 5960

10 Calcula la medida sexagesimal de un ángulo que cumple la siguiente relación:

$$\frac{10}{9C} - \frac{9}{10S} = \frac{R}{2\pi}$$

Siendo S, C y R lo convencional.

A) 6° B) 8° C) 9°
D) 10° E) 12°

11 Las medidas de tres ángulos están en progresión aritmética cuya razón es 20°. Si la suma de los ángulos mayores es igual a 200°, halla la suma de los tres ángulos en el sistema centesimal.

A) 216^g B) 243^g C) 300^g
D) 320^g E) 400^g

12 Sean los ángulos:

$\alpha = 17^g$; $\beta = 180°$ y $\theta = \frac{\pi}{12}$ rad,

ordenarlos en forma creciente.

A) $\alpha; \beta; \theta$ B) $\theta; \alpha; \beta$ C) $\beta; \alpha; \theta$
D) $\theta; \beta; \alpha$ E) $\beta; \theta; \alpha$

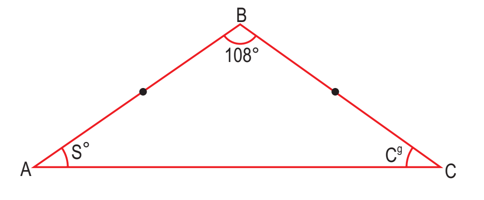
13 Simplifica:

$$E = \sqrt{\frac{5S - 4C}{C - S} + \sqrt{\frac{C + S}{C - S}} - 3}$$

Siendo S, C y R lo convencional.

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

14 Del gráfico, calcula el valor del ángulo M en el sistema radial, donde: $M = C° + S^g$



A) $\frac{180}{455}\pi$ rad B) $\frac{125}{453}\pi$ rad C) $\frac{181}{450}\pi$ rad
D) $\frac{180}{453}\pi$ rad E) $\frac{179}{450}\pi$ rad



Claves

1. D	3. E	5. B	7. E	9. E	11. C	13. B
2. B	4. A	6. A	8. A	10. A	12. B	14. C

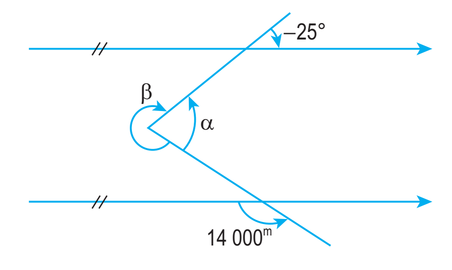
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De la figura, analiza las expresiones:



I. $\beta > \alpha$ ( )

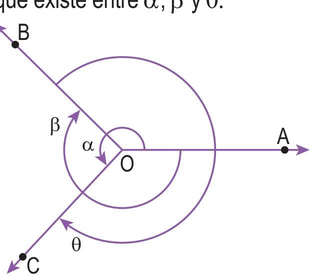
II. $\alpha = 131°$ ( )

III. $\beta = -229^g$ ( )

A) FFV B) FFF C) VFF
D) FVF E) VVV

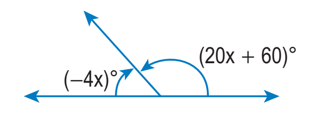
2. De la figura, indica la relación que existe entre α, β y θ.

A) $\alpha - \beta - \theta = 720°$
B) $\alpha + \theta - \beta = 360°$
C) $\alpha + \beta - \theta = 720°$
D) $\alpha + \beta + \theta = 0$
E) $-\alpha + \beta - \theta = 720°$



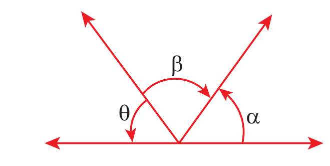
Razonamiento y demostración

3. Halla x del gráfico.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. Del gráfico mostrado, indica una relación entre α; β y θ.



A) $\alpha + \beta + \theta = 180°$ B) $\alpha - \theta + \beta = 180°$
C) $\alpha - \beta - \theta = 180°$ D) $\beta - \alpha - \theta = 180°$
E) $\alpha + \theta - \beta = 180°$

5. Convierte al sistema sexagesimal:

I. 450^g

A) 105° B) 200° C) 405°
D) 118° E) 233°

II. $\frac{\pi}{6}$ rad

A) 10° B) 30° C) 20°
D) 60° E) 50°

6. Calcula: $E = \frac{2°9'}{3'} + \frac{1^g25^m}{5^m}$

A) 66 B) 67 C) 68
D) 69 E) 95

7. Convierte al sistema centesimal:

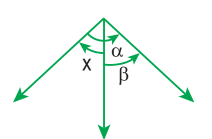
I. 270°

A) 300^g B) 200^g C) 100^g
D) 50^g E) 10^g

II. $\frac{\pi}{10}$ rad

A) 18^g B) 15^g C) 17^g
D) 20^g E) 12^g

8. Del gráfico, halla x.



A) $\alpha - \beta$ B) $\alpha + \beta$ C) $-\alpha - \beta$
D) $\beta - \alpha$ E) 0

9. Calcula P en el sistema sexagesimal.

$P = 40^g + \frac{3\pi}{4}$ rad

A) 171° B) 170° C) 50°
D) 120° E) 140°

10. Calcula el valor de $J = \frac{3°5'}{5'}$

A) 17 B) 27 C) 37
D) 47 E) 57

11. Calcula: $E = \frac{30°}{\frac{\pi}{12}\text{ rad}} + \frac{40^g}{\frac{\pi}{5}\text{ rad}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución de problemas

12. En un triángulo dos de sus ángulos miden $\pi/9$ rad y $\pi/3$ rad. ¿Cuál es la medida sexagesimal del tercer ángulo?

A) 60° B) 80° C) 100°
D) 120° E) 140°

13. En un triángulo, sus ángulos interiores miden $(80n)^g$; $(18n)°$ y $\frac{\pi n}{3}$ rad. ¿Cuánto vale n?

A) 3/5 B) 2/5 C) 6/5
D) 7/5 E) 9/5

14. Un ángulo se expresa como $(7n - 4)°$ y también como $(8n - 6)^g$. ¿Cuánto vale n?

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

15. En un triángulo, dos de sus ángulos interiores miden $\frac{\pi}{3}$ rad y 40^g. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

A) 64° B) 74° C) 84°
D) 94° E) 54°

16. Siendo S y C el número de grados sexagesimales y centesimales, respectivamente, para la mitad de un ángulo recto. Halla el valor de: $\frac{S + 35}{C + 14}$

A) 2/3 B) 3/2 C) 4/5 D) 5/4 E) 6/5

17. Un ángulo mide $(7n + 3)°$ y también $(8n + 2)^g$. ¿Cuál es la medida radial de dicho ángulo?

A) $\pi/3$ rad B) $\pi/4$ rad C) $\pi/5$ rad
D) $\pi/6$ rad E) $\pi/9$ rad

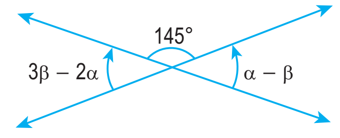
18. Calcula la medida del menor de dos ángulos complementarios en radianes, sabiendo que sus medidas difieren en 49^g.

A) $\frac{55\pi}{200}$ rad B) $\frac{51\pi}{400}$ rad C) $\frac{11\pi}{200}$ rad
D) $\frac{11\pi}{100}$ rad E) $\frac{23\pi}{240}$ rad

NIVEL 2

Comunicación matemática

19. Dado el gráfico, ¿cuántas vueltas contiene el ángulo $3\alpha + \frac{30}{7}\beta$?



A) 1 vuelta B) 1/2 vuelta C) 1/4 vuelta
D) 2/3 vuelta E) 4 vueltas

20. Sean:

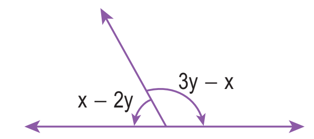
$A = \frac{\pi}{4}$ rad $+ 10°$ $B = \frac{\pi}{5}$ rad $+ 30°$

Entonces:

A) A es mayor que B. B) A es menor que B.
C) A es igual a B. D) A y B no se pueden comparar.
E) Falta información.

Razonamiento y demostración

21. En el gráfico, halla el valor de $\left(\frac{2x - 5y}{4}\right)$.



A) 45° B) 30° C) 60°
D) 90° E) 75°

22. Calcula el valor de α en el sistema sexagesimal y efectúa.

$$\alpha = \frac{7\pi}{12} \text{ rad} + 36°$$

A) 100° B) 140° C) 141°
D) 142° E) 145°

23. Reduce: $E = \frac{1^g}{10^m} + \frac{1°}{3'} + \frac{1^m}{1^s}$

A) 10 B) 40 C) 50
D) 70 E) 130

Resolución de problemas

24. Si: $\frac{3\pi}{11}$ rad $= \overline{4a}°\overline{b}'\overline{2c}''$

Calcula: $L = \frac{ab}{c - 2}$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

25. Dos ángulos complementarios se diferencian en 18°. Halla el menor de ellos.

A) 36° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 54°

26. Las medidas de dos ángulos internos de un triángulo son 18° y $0{,}25\pi$ rad. Determina la medida del tercer ángulo en grados sexagesimales.

A) 112° B) 115° C) 117°
D) 119° E) 121°

27. Un ángulo cumple con la relación siguiente:

$$\frac{S}{90} + \frac{C}{50} + \frac{R}{\pi} = 14$$

Halla la medida radial, siendo S, C y R lo convencional.

A) π rad B) 2π rad C) $\frac{\pi}{2}$ rad
D) $\frac{\pi}{4}$ rad E) $\frac{\pi}{8}$ rad

28. Sabiendo que la suma de los números que representan la medida de un ángulo en grados sexagesimales y centesimales es 133, entonces la medida de dicho ángulo es:

A) 70^g B) 63° C) 133°
D) 190^g E) A y B son correctas

29. Un ángulo en el sistema sexagesimal se expresa por:

$$\left(\frac{25}{x} + 2\right)°$$

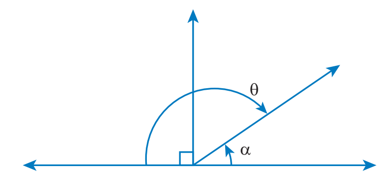
Calcula el valor de x para que este ángulo mida 280^g.

A) 0,01 B) 0,1 C) 1
D) 10 E) 100

NIVEL 3

Comunicación matemática

30. Del gráfico, indica verdadero o falso, según corresponda:



I. El ángulo α es menor que 90°. ( )

II. El ángulo θ se encuentra en el intervalo $\langle -180°; -90° \rangle$. ( )

III. El suplemento de α se encuentra en el intervalo $\langle 90°, 180° \rangle$. ( )

A) FVV B) VVF C) VFV D) VVV E) FFV

31. Si a; b; c; d son los valores de la medida de un mismo ángulo expresado en minutos sexagesimales, minutos centesimales, segundos sexagesimales y segundos centesimales, respectivamente, relaciona según corresponda:

a) $\frac{c}{a}$ I. 100

b) $\frac{d}{b}$ II. 60

c) $\frac{a}{b}$ III. $\frac{250}{81}$

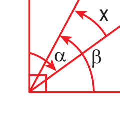
d) $\frac{d}{c}$ IV. $\frac{27}{50}$

A) Ia; IIb; IIIc; IVd
B) Ib; IIa; IIId; IVc
C) Ib; IIa; IIIc; IVd
D) Ia; IId; IIIc; IVb
E) Id; IIa; IIIc; IVb

Razonamiento y demostración

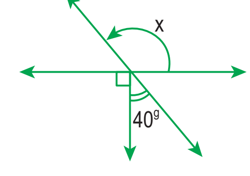
32. Del gráfico, halla x.

A) $\beta - \alpha - 90°$
B) $\beta + \alpha - 90°$
C) $\beta - \alpha + 90°$
D) $\alpha - \beta - 90°$
E) $\alpha - \beta + 90°$



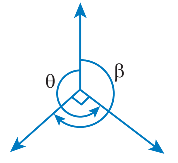
33. Del gráfico, calcula el valor de x.

A) 117°
B) 126°
C) 143°
D) 153°
E) 120°



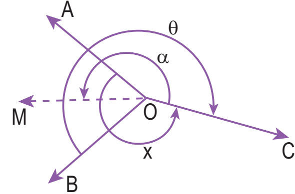
34. Del gráfico mostrado, calcula $\theta - \beta$.

A) 90°
B) 180°
C) 450°
D) 270°
E) 360°



35. Del gráfico, halla x en función de α y θ.
Si $m\angle AOM = m\angle MOB$.

A) $360° - 2\alpha - \theta$
B) $180° + 2\alpha + \theta$
C) $360° - 2\alpha - \theta$
D) $360° + \alpha - \theta$
E) $\alpha + \theta$



36. Determina la medida circular del ángulo que cumple con la igualdad.

$$\frac{\frac{S^5}{81} + \frac{C^4}{100} + 400\frac{R^3}{\pi^2}}{\frac{S^4}{36} + \frac{C^3}{40} + 5\frac{R^2}{\pi}} = \frac{S}{3} + \frac{C}{4} - 5$$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad
D) $\frac{\pi}{6}$ rad E) $\frac{\pi}{5}$ rad

Resolución de problemas

37. Se tiene el ángulo $19{,}375^g$ que expresado en el sistema sexagesimal es: a° b' c''. Calcula el valor de (a + b + c)° en el sistema radial.

A) $\frac{29\pi}{90}$ rad B) $\frac{30\pi}{13}$ rad C) $\frac{17\pi}{30}$ rad
D) $\frac{17\pi}{30}$ rad E) $\frac{21\pi}{16}$ rad

38. La suma de complementos de 2 ángulos es 70^g y la diferencia es 13°. Calcula el valor de 2 veces el menor más el mayor e indica su raíz cuadrada.

A) 10° B) 14° C) 18°
D) 19° E) 13°

39. Halla el equivalente en grados, minutos y segundos centesimales de un arco de 26° 12' 45''.

A) $28^g\ 15^m\ 10^s$ B) $29^g\ 15^m\ 30^s$ C) $29^g\ 20^m\ 10^s$
D) $28^g\ 10^m\ 5^s$ E) $29^g\ 12^m\ 50^s$

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		
1. B	**10.** C	**19.** A	**27.** B	**35.** A
2. A	**11.** C	**20.** B	**28.** E	**36.** D
3. E	**12.** C	**21.** A	**29.** B	**37.** A
4. E	**13.** C	**22.** C	NIVEL 3	**38.** E
5. C, B	**14.** D	**23.** E	**30.** D	**39.** E
6. C	**15.** C	**24.** E	**31.** B	
7. A, D	**16.** D	**25.** A	**32.** A	
8. D	**17.** B	**26.** C	**33.** B	
9. A	**18.** B		**34.** C	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: SECTOR CIRCULAR

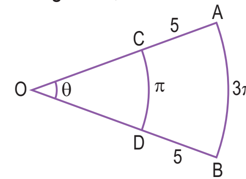
1 En un sector circular el arco mide 4π y el radio mide 12. ¿Cuánto mide el ángulo central?

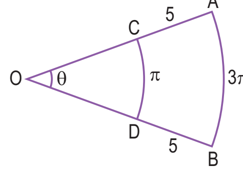
A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

2 En un sector circular el arco mide 100 m. Si el ángulo se reduce en un 20% y el radio aumenta en un 20% se obtiene un nuevo sector cuyo arco mide:

A) 96 m B) 48 m C) 24 m
D) 12 m E) 72 m

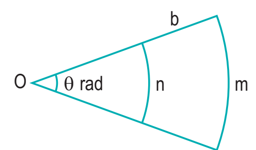
3 Del gráfico, calcula θ.





A) 70° B) 63° C) 72°
D) 36° E) 54°

4 De la figura, calcula: $\frac{m-n}{b\theta}$



A) 0 B) 1 C) 2
D) 0,5 E) 0,2

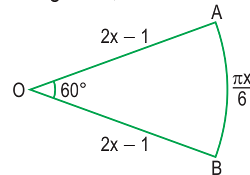
5 En un sector circular el radio y el arco están en una proporción de 2 a 3. ¿Cuánto mide el ángulo central?

A) 1 rad B) 3 rad C) $\frac{2}{3}$ rad
D) $\frac{3}{2}$ rad E) $\frac{1}{6}$ rad

6 Halla el área de la región sombreada.

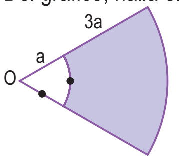
A) $\frac{\pi}{4}R^2$ B) $\frac{3\pi}{4}R^2$ C) $\frac{5\pi}{4}R^2$
D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{9\pi}{4}R^2$

7 Del gráfico, calcula x.



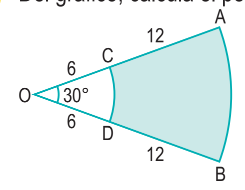
A) 2 B) 1 C) $\frac{2}{3}$
D) 3 E) 3/2

8 Del gráfico, halla el perímetro de la región sombreada.



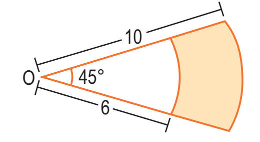
A) 8a B) 6a C) 7a
D) 11a E) 12a

9 Del gráfico, calcula el perímetro de la región sombreada.



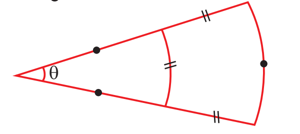
A) $2(\pi + 6)$ B) $4(\pi + 4)$ C) $3(\pi + 6)$
D) $2(\pi + 4)$ E) $4(\pi + 6)$

10 Halla el área de la región sombreada.



A) 4π B) 6π C) 7π
D) 3π E) 8π

11 Del gráfico, calcula: $E = \theta^{-1} - \theta$

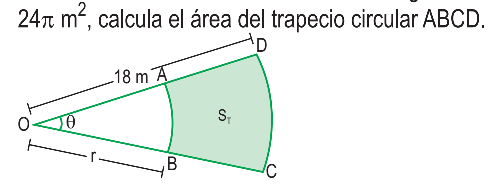


A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 2
D) 0,5 E) $\sqrt{2}/2$

12 Dos ángulos complementarios y las longitudes de los arcos que subtienden en un círculo de radio R suman 5π cm. Calcula R.

A) 12 cm B) 4 m C) 10 cm
D) 13 cm E) 12 m

13 La longitud del arco AB es la sexta parte de la longitud de la circunferencia de radio r, Si el área de la región AOB es igual a 24π m^2, calcula el área del trapecio circular ABCD.



A) 32π m^2 B) 14π m^2 C) π m^2
D) 36π m^2 E) 30π m^2

14 Del gráfico, si el área del trapecio circular ABCD es igual a 63 cm^2, calcula el área del sector circular AOB.

D
A
S
O
B
C

A) 7 cm^2 B) 189 cm^2 C) 24 cm^2
D) 21 cm^2 E) 18 cm^2

Claves

1. B	3. C	5. D	7. C	9. E	11. B	13. E
2. A	4. B	6. C	8. D	10. E	12. C	14. D

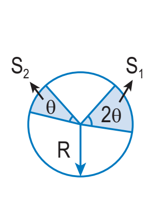


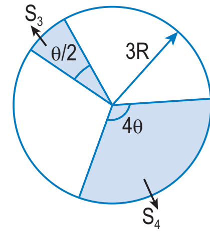
Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Asocia las áreas mencionadas con la razón en la que se encuentran sus medidas si:

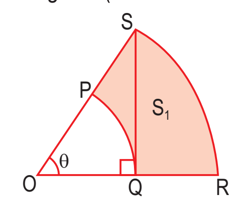


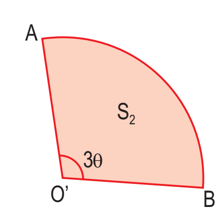


I. S_2 y S_1	a. 1/18
II. S_3 y S_2	b. 5/8
III. S_1 y S_4	c. 9/2
	d. 1/2

A) Id; IIb; IIIc B) Ia; IIb, IIIc C) Id, IIc, IIIa
D) Ic, IIb, IIIa E) Ia, IIc, IIId

2. De las figuras (sectores circulares):





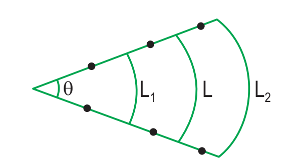
Si SQ = O'B, ¿qué se puede afirmar de S_1 y S_2?

A) S_1 es mayor que S_2.
B) S_1 y S_2 son iguales.
C) S_1 y S_2 están en razón de 1 a 3.
D) S_1 es menor que S_2.
E) C y D.

Razonamiento y demostración

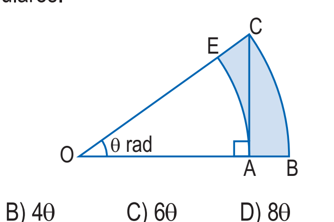
3. En el gráfico, calcula L si:

$L_1 + L_2 = 8\pi$



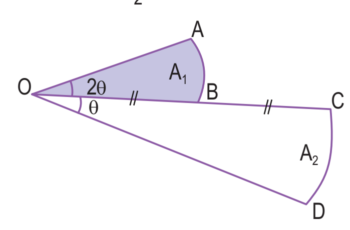
A) 8π B) 14π C) 2π
D) 4π E) π

4. Del gráfico, halla el área sombreada, si AC = 4, EOA y COB son sectores circulares.



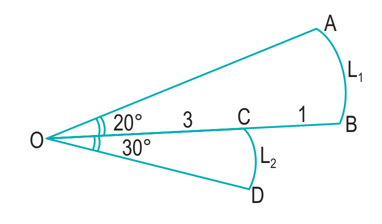
A) 3θ B) 4θ C) 6θ D) 8θ E) 16θ

5. Del gráfico, calcula: $J = \dfrac{A_1}{A_2}$



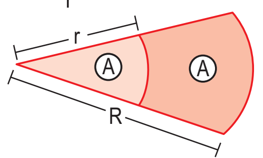
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

6. Del gráfico, calcula: $J = \dfrac{L_1}{L_2}$



A) $\frac{7}{9}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{9}{7}$ E) $\frac{6}{5}$

7. Del gráfico dado, calcula $\frac{R}{r}$, si las áreas sombreadas son iguales.



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Resolución de problemas

8. En un sector circular el ángulo central mide 30° y el radio 12 cm, ¿cuál es el perímetro del sector?

A) 20π cm B) $2(\pi + 10)$ cm C) $2(12 + \pi)$ cm
D) $2(\pi + 13)$ cm E) $4(2 + \pi)$ cm

9. En un sector circular el área es S. Si el radio aumenta en su doble, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

A) 2S B) 3S C) 5S D) 6S E) 9S

10. En un sector circular el área es 2π cm^2 y el arco π cm, ¿cuánto mide el radio?

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 6 cm

11. En un sector circular el arco mide 2π cm y el radio 12 cm, ¿cuál es su área?

A) 18π cm^2 B) 12π cm^2 C) 24π cm^2
D) 36π cm^2 E) 6π cm^2

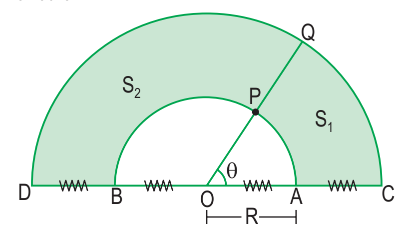
12. En un sector circular el arco mide 2π cm y el ángulo central 40°, ¿cuál es su área?

A) 9π cm^2 B) 18π cm^2 C) 27π cm^2
D) 36π cm^2 E) 16π cm^2

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Sea el semicírculo:



Si: $5S_{\triangleleft AOP} = S_{\triangleleft POB}$
Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. S_2 es a S_1 como 1 es a 5. ( )

II. El ángulo θ tiene como medida $\frac{\pi}{6}$ rad. ( )

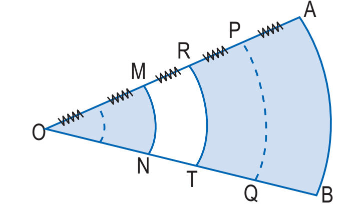
III. Si R es igual a 6 m, el $S_{\triangleleft AOP}$ es igual a 3π m^2. ( )

A) FFV B) VVF C) FVV
D) FVF E) VFV

14. De la figura:



Se cumple:
$S_{\triangleleft OMN} = S_1$
$S_{\square NMRT} = S_2$
$S_{\triangleleft OPQ} = S_3$



Si el área de la región (sector circular) AOB es igual a 25S, asocia las expresiones de la izquierda con sus valores equivalentes.

I. $\frac{S_1 + S_3}{5}$	a. 20S
II. $4S_2$	b. S
III. $\frac{S_1 - S_2}{11}$	c. 4S
	d. 16S

A) Ic, IId, IIIa B) Ib, IId, IIIa C) Ia, IIb, IIIc
D) Ic, IIa, IIIb E) Ia, IIc, IIId

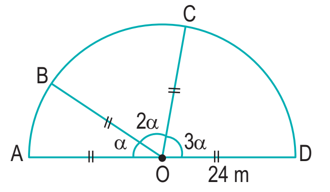
Razonamiento y demostración

15. En la figura, halla la longitud de $\overset{\frown}{AB}$.

A) π m
B) 2π m
C) 3π m
D) 4π m
E) 6π m

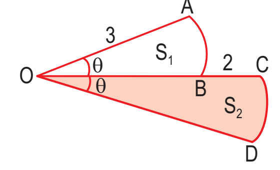
16. Halla la longitud del arco BC.

A) 4π m
B) 6π m
C) 8π m
D) 12π m
E) 15π m



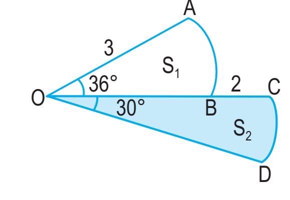
17. Del gráfico, calcula: $\frac{S_1}{S_2}$

A) 0,9
B) 0,8
C) 0,36
D) 0,45
E) 0,72



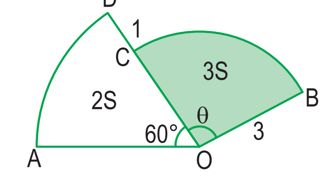
18. Del gráfico, calcula: $\frac{S_1}{S_2}$

A) 0,012
B) 0,232
C) 0,312
D) 0,432
E) 0,472



19. Del gráfico, calcula θ.

A) 100°
B) 120°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



Resolución de problemas

20. En un sector circular el arco mide 12π cm si el ángulo se reduce a la mitad y el radio se triplica, se obtiene un nuevo sector cuyo arco mide:

A) 12π cm B) 18π cm C) 24π cm
D) 28π cm E) 36π cm

21. En un sector circular la longitud de arco es el triple del radio. Si el perímetro del sector circular es 30 m. ¿Cuánto mide su área?

A) 36 m^2 B) 18 m^2 C) 24 m^2
D) 54 m^2 E) 72 m^2

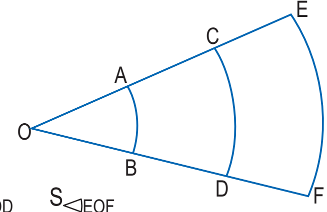
22. Encuentra el área de un sector circular, sabiendo que su ángulo central mide 0,785 rad y que su longitud de arco vale 6,28 m. (Tomar $\pi = 3,14$).

A) 2π m^2 B) 4π m^2 C) 8π m^2
D) 16π m^2 E) 64π m^2

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. De la figura:



Se cumple que:

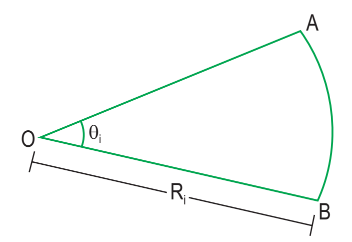
$$S_{\triangleleft AOB} = \frac{S_{\triangleleft COD}}{4} = \frac{S_{\triangleleft EOF}}{16}$$

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. A no es punto medio de $\overline{OC}$. ( )
II. AC es a AE como 1 es a 3. ( )
III. AC y CE tienen igual medida. ( )

A) VFV B) FVV C) FFV D) FVF E) VVV

24. Del sector circular AOB:



Relaciona los enunciados para que la longitud del arco AB ($L_{\widehat{AB}}$) no varíe.

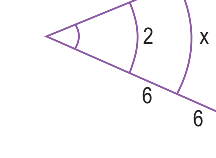
I. El radio disminuye a la mitad.	a. El ángulo central se duplica.
II. El ángulo disminuye a 3/4 de su valor inicial.	b. El radio aumenta en 1/3 de su valor inicial.
III. El ángulo se incrementa en 2/3 de su valor.	c. El radio disminuye en 2/5 de su valor inicial.

A) Ib, IIc, IIIa B) Ia, IIb, IIIc C) Ia, IIc, IIIb
D) Ib, IIIa, IIc E) Ic, IIa, IIIb

Razonamiento y demostración

25. Halla x.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 10



26. Halla x.

A) 16 C) $\frac{20}{3}$

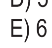
B) 8 D) $\frac{5}{3}$

E) $\frac{16}{3}$

2a
a
4
x
12
a
2a

27. Calcula el área de la región sombreada.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

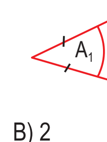


A
D
O
x – 1
x + 1
1
C
x
B

28. Según la figura, halla:

$$E = \frac{A_1A_3 + A_3A_2 - A_2A_1}{(A_1)^2 - (A_2)^2 + (A_3)^2}$$

(A_i: área)



A_1 A_2 A_3

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

Resolución de problemas

29. A un sector circular de área 100 m^2 se le aumenta su radio en 20% y se le disminuye su longitud de arco en 40%. Halla el área del nuevo sector.

A) 36 m^2 B) 72 m^2 C) 144 m^2
D) 200 m^2 E) 288 m^2

30. El perímetro de un sector circular es 10 m y su área 6 m^2. Hallar la medida de su ángulo central en radianes.

A) 2 B) 3 C) 3/4
D) 4/3 E) Hay 2 respuestas

31. Si en un sector circular el ángulo central mide x rad y el radio (x + 1) cm, además, el área de dicho sector es numéricamente igual a la medida circular del ángulo central. ¿Cuánto mide el arco?

A) $(\sqrt{2} - 1)$cm B) $(\sqrt{2} + 1)$cm C) $(2 + \sqrt{2})$ cm
D) $(2 - \sqrt{2})$cm E) $\sqrt{2}$ cm

32. Se tiene un sector circular de radio R y un ángulo central de 36°. ¿Cuánto hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que el área no varíe, si su radio disminuye un cuarto del anterior?

A) 28° B) 25° C) 20°
D) 17° E) 24°



Claves

NIVEL 1	8. C	15. D	NIVEL 3	30. E
1. C	9. E	16. C	23. D	31. D
2. E	10. D	17. C	24. B	32. A
3. D	11. B	18. D	25. A	
4. D	12. A	19. E	26. C	
5. B	NIVEL 2	20. B	27. C	
6. B	13. C	21. D	28. A	
7. D	14. D	22. C	29. B	



Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1 En un triángulo rectángulo la hipotenusa es 13 y uno de los catetos es 12. Determina el valor de la cotangente del ángulo opuesto al lado menor.

A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{5}{13}$
D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{13}{12}$

2 Si la secante del mayor ángulo agudo de un triángulo rectángulo es $\frac{25}{7}$. Halla la cotangente del ángulo menor.

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $\frac{24}{7}$
D) $\frac{25}{7}$ E) $\frac{25}{24}$

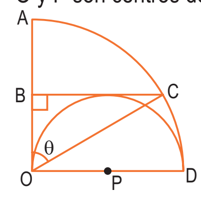
3 Si los catetos de un triángulo están en la relación de 18 a 24. Determina el coseno del mayor ángulo agudo.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

4 En un triángulo rectángulo se sabe que la tangente de un ángulo es $\frac{35}{12}$. Determina la cosecante del mismo ángulo.

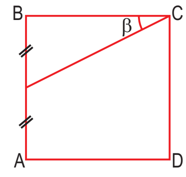
A) $\frac{35}{37}$ B) $\frac{12}{37}$ C) $\frac{35}{12}$
D) $\frac{37}{35}$ E) $\frac{12}{35}$

5 O y P son centros de los arcos. Calcula senθ.



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) 1

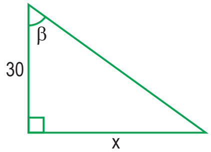
6 ABCD es un cuadrado. Calcula tanβ.



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{2}$

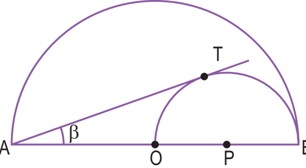
7 En el gráfico: $\cot\beta = \frac{5}{12}$

Halla x.



A) 40　B) 50　C) 72
D) 60　E) 70

8 En la figura: AO = OB, además O y P son centros y T es punto de tangencia. Calcula $\text{sen}\beta$.



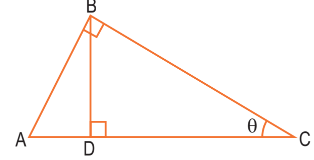
A) $2\sqrt{2}$　B) 3　C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　E) 2

9 Si: $\cos\theta = \frac{m}{n}$ (θ: agudo)

Calcula: $P = \sqrt{n^2 - m^2}\cot\theta$

A) n　B) n/m　C) 2n
D) m　E) 2m

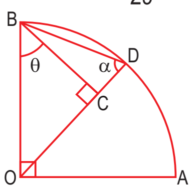
10 En la siguiente figura:



Calcula BD en función de θ y m, si AC = m.

A) $m\,\text{sen}\theta$　B) $m\,\text{sen}2\theta$　C) $m\frac{\text{sen}\theta}{2}$
D) $m\cos\theta$　E) $m\frac{\text{sen}2\theta}{2}$

11 Si el $\text{sen}\theta = \frac{20}{29}$, calcula $\tan\alpha$.



A) 4/3　B) 7/3　C) 21/29
D) 3/7　E) 3/4

12 Calcula el valor de x si el $\text{sen}\theta = 3/7$.

A) 27/7　B) 9/7　C) 7/9
D) 21/8　E) 9/8

13 En un triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a 21. Si la tangente de uno de sus ángulos agudos es igual a 2/5, calcula la diferencia de longitudes entre catetos.

A) 6　B) 9　C) 18
D) 15　E) 3

14 En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), si: $\sec A = \frac{25}{24}$, determina: $\tan\frac{A}{2}$

A) 25/24　B) 7　C) 25/2
D) 7/24　E) 1/7

Claves

1. A	3. E	5. C	7. C	9. D	11. B	13. B
2. C	4. D	6. E	8. C	10. E	12. A	14. E

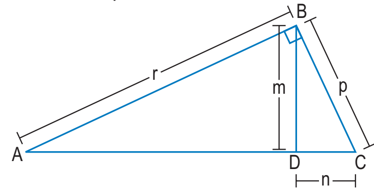


Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. En la figura se cumple:
$m^2 + n^2 = p^2$



Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

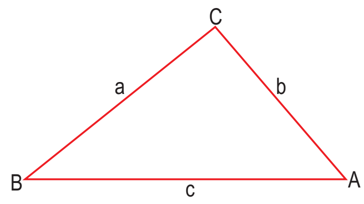
I. El triángulo BDC es un triángulo rectángulo.

II. $\frac{r}{p}$ es equivalente a $\frac{m}{n}$.

III. $\overline{BD}$ es altura relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

A) VFF B) VFV C) FFV
D) FVF E) VVV

2. En la figura se cumple: $a^2 + b^2 = c^2$



¿Qué proposiciones son verdaderas?

I. El triángulo ABC es rectángulo.

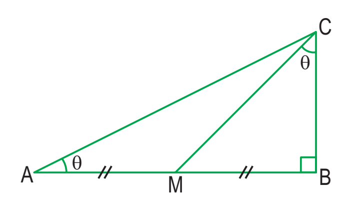
II. Los ángulos B y C son agudos.

III. El ángulo A es recto.

A) Solo II B) Solo I C) Todos
D) I y III E) I y II

Razonamiento y demostración

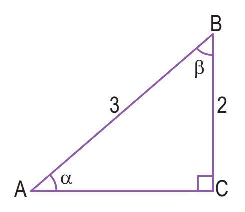
3. Del gráfico, calcula $\tan\theta$.



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

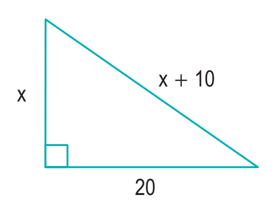
4. Según el triángulo rectángulo de la figura, calcula:

$M = \frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta}{\cos\beta} + \cot\alpha$



A) $1 + \sqrt{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\sqrt{5} - 1$
D) $2 + \sqrt{5}$ E) $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$

5. Calcula x.



A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

6. Calcula: $\text{sen}\theta$

Si: θ es agudo y $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

7. Sabiendo que: $\cot\theta = 0{,}4$ y θ es un ángulo agudo.
Calcula: $E = \sec\theta\csc\theta$

A) 2,9 B) 2,8 C) 2,7
D) 2,6 E) 2,4

8. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B).
Calcula: $E = \frac{\tan A + \cot A}{2\sec C\csc C}$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 3 E) 1/3

9. En un triángulo ABC, recto en C, se tiene que:

$$\frac{\tan A\cot B}{1 - \text{sen}A} = \frac{\tan B\cot A}{1 - \cos B}$$

Halla: $\tan A + \tan B$

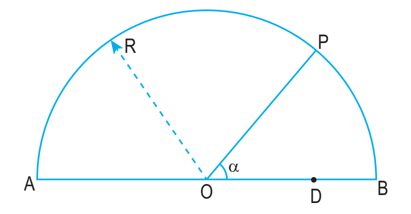
A) 1 B) 2 C) 3
D) –1 E) –2

10. Si: $\tan\theta = 4/9$ (θ: agudo)
calcula: $\text{sen}\theta\cos\theta$

A) $\frac{12}{37}$ B) $\frac{13}{37}$ C) $\frac{36}{43}$
D) $\frac{36}{97}$ E) $\frac{86}{71}$

Resolución de problemas

11. En la semicircunferencia, D es la proyección de P sobre $\overline{AB}$, DB es igual 4. Si el ángulo POD tiene como tangente 3/4, calcula el radio de la semicircunferencia.



A) 12 B) 20 C) 25
D) 15 E) 16

12. En un triángulo rectángulo, el seno del mayor ángulo agudo es igual a $\frac{21}{29}$, calcula la tangente del menor de los ángulos agudos en dicho triángulo.

A) 21/20 B) 39/20 C) 19/20
D) 20/21 E) 20/19

13. Sea un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es igual a $(20 + 10\sqrt{2})$ m; calcula la longitud del lado menor.

A) 16 B) 20 C) $10\sqrt{2}$
D) 10 E) $15\sqrt{2}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Si en el ⊿ABC (recto en C), el lado a es al lado b como 5 es a 12, ¿cuál de las expresiones es correcta?

A) tanA > 1 B) tanB = 12/13 C) cscA = 13/5
D) cosB = 5/12 E) cotB = 12/5

15. Para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo:

I. Indica la razón entre sus catetos opuesto y adyacente, respectivamente.	a. Cateto Adyacente
II. Es el lado opuesto a su ángulo complementario.	b. Tangente
III. Razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente a su ángulo complementario.	c. Hipotenusa
IV. Es el lado opuesto al ángulo recto.	d. Cosecante

A) Ib, IId, IIIc, IVa B) Ia, IIb, IIIc, IVd
C) Ib, IId, IIIc, IVa D) Ib, IIa, IIId, IVc
E) Ic, IIa, IIId, IVb

Razonamiento y demostración

16. Si secα = 2, (α → agudo)
Calcula: C = secα + cscα

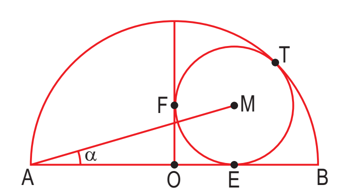
A) 4 B) $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$
D) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{3}$

17. Si: $\tan\theta = \frac{2a}{a^2-1}$ y $(0° < \theta < 90°)$

Calcula: senθ

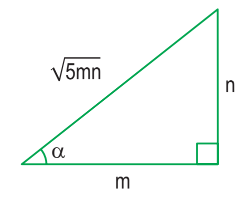
A) $\frac{2a}{a^2+1}$ B) $\frac{2a}{a^2-1}$ C) $\frac{a^2+1}{2a}$
D) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ E) $\frac{a^2-1}{2a}$

18. Si O y M son centros; E, F y T son puntos de tangencia.
Calcula: cotα



A) $\sqrt{2}+2$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+1$
D) $\sqrt{2}-2$ E) $\sqrt{2}+3$

19. Calcula: E = tanα + cotα



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 10

20. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se cumple: senA = 4tanC

Calcula: $E = \sqrt[3]{\cot^2 C - 4\sec A + 7}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{7}$

21. Sabiendo que:

$\cos\theta = \frac{a-b}{a+b}$; ($\theta$ es agudo)

Evalúa:

$E = (\sec\theta - \tan\theta)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$

A) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ B) $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ C) $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$
D) $a - b$ E) $a + b$

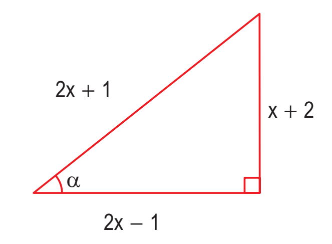
22. Si $\text{sen}\beta = \frac{1}{5}$ (β: agudo), calcula:

$M = \cot^2\beta + 5\sqrt{6}\cos\beta$

A) 36 B) 24 C) 32
D) 30 E) 20

23. En el gráfico mostrado, calcula:

$E = \frac{\csc\alpha + \cot\alpha}{\sec\alpha - \tan\alpha}$



A) 4 B) 8 C) 6
D) 3 E) 7

Resolución de problemas

24. En un triángulo rectángulo la hipotenusa y un cateto están en la proporción de 4 a 3. Siendo θ el menor ángulo agudo; calcula:

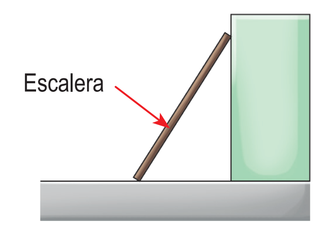
$L = \text{sen}\theta\tan\theta$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{12}{5}$

25. En un triángulo rectángulo la suma de los cosenos de los ángulos agudos del triángulo es 1/3. Si la hipotenusa mide 18 cm, ¿cuánto sería la suma de los catetos?

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 6 cm

26. Una escalera está apegada en una pared como se muestra.



Calcula el coseno del ángulo agudo que forman la pared y la escalera si esta tiene 37 m de longitud y la distancia de su base al pie de la pared es 35 m.

A) $\frac{4\sqrt{7}}{37}$ B) $\frac{12}{37}$ C) $\frac{8\sqrt{7}}{37}$
D) $\frac{5\sqrt{7}}{37}$ E) $\frac{18}{37}$

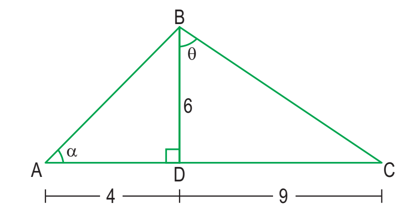
NIVEL 3

Comunicación matemática

27. Para α, θ y ω ángulos agudos, marca la proposición incorrecta.

A) $\text{sen}\alpha = \frac{2}{9}$ B) $\csc\theta = \sqrt{7} - \sqrt{5}$
C) $\text{sen}\omega = \sqrt{2} - 1$ D) $\sec\omega = \sqrt{11} - \sqrt{5}$
E) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

28. De la figura:



Indica la proposición incorrecta.

A) El $\text{sen}\alpha$ es igual a $\frac{3\sqrt{3}}{13}$.

B) La secante de θ es igual a $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

C) ABC es un triángulo rectángulo.

D) El ángulo α es igual al ángulo θ.

E) AB y AD están en razón de $\sqrt{13}$ y 2, respectivamente.

Razonamiento y demostración

29. Siendo $\tan\alpha = \sqrt{5}$; $\tan\theta = \cos^2\alpha$, ($\alpha$; θ son ángulos agudos), calcula: $L = 37\text{sen}^2\theta + 6\text{sen}^2\alpha$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

30. Siendo $\sec\theta = \sqrt{3}$; $\tan\beta = \text{sen}\theta$, ($\beta$; θ ángulos agudos), calcula: $L = \tan^2\theta + 5\cos^2\beta$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

31. En un triángulo ABC ($m\angle B = 90°$), se cumple que:

$\text{sen}A = \dfrac{2x+1}{6x+1}$ y $\cos C = \dfrac{3x-1}{7x-1}$

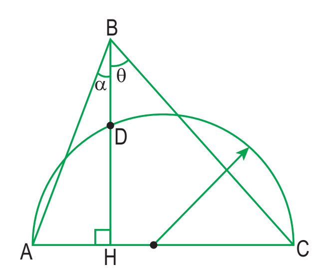
Si el cateto mayor mide 6 m, calcula el perímetro del triángulo.

A) 30 m B) 25 m C) 20 m
D) 15 m E) 10 m

32. Si: $0° < \alpha < 45°$ y $\cot 2\alpha = \dfrac{15}{8}$. Calcula: $E = (\sqrt{17} - 4)\cot\dfrac{\alpha}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

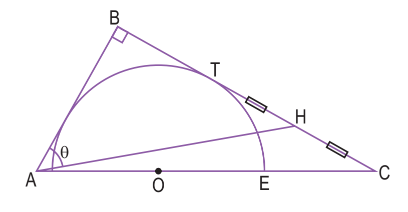
33. Del gráfico calcula $\tan\alpha \tan\theta$.



Siendo: DH = 6 y BD = 3

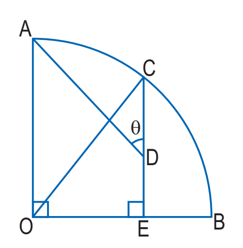
A) 4/25 B) 1/21 C) 9/2
D) 18/7 E) 4/9

34. En la figura, 3BT = 4TH.
Calcula: $\tan\theta$



A) 21/20 B) 3/4 C) 10/3
D) 20/3 E) 20/17

35. De la figura mostrada, calcula $\cot\theta$, donde $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ y D punto medio de $\overline{CE}$.



A) $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$
D) $\dfrac{3\sqrt{2}-1}{3}$ E) $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$

Resolución de problemas

36. Calcula el área de un triángulo rectángulo ABC, si: $\tan A = \dfrac{5}{12}$ y la hipotenusa mide 26 m.

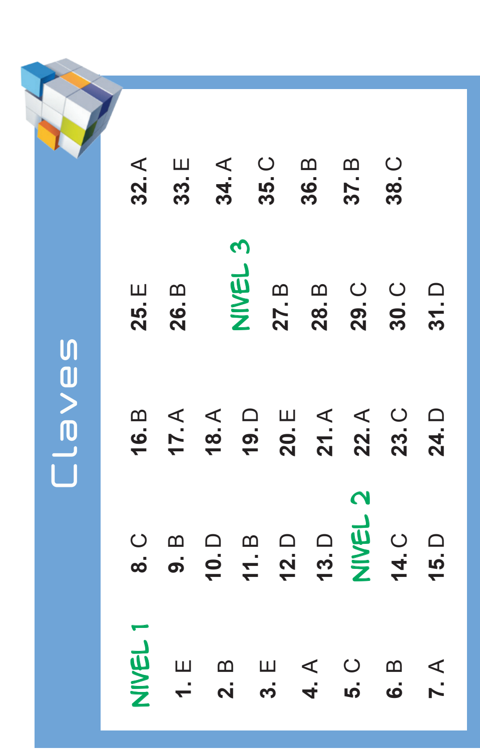
A) 100 m^2 B) 120 m^2 C) 140 m^2
D) 260 m^2 E) 240 m^2

37. El perímetro de un triángulo rectángulo es 140 u y la tangente de uno de los ángulos agudos es 1,05. Calcula la longitud del lado mayor.

A) 42 u B) 58 u C) 40 u
D) 41 u E) 49 u

38. Determina la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que la suma de sus catetos es 6 m y el producto de los senos de los ángulos agudos es 0,22.

A) 4 m B) 7 m C) 5 m
D) 6 m E) 3 m





Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Encuentra x en:
$\cos(7x - 3°)\sec(5x + 7°) = 1$

A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4 E) 5°

2 Halla el valor de x en:
$\tan 7x = \cot 3x$

A) 3° B) 6° C) 9°
D) 12° E) 15°

3 Para qué valores menores y positivos de α y β, se cumple:
$\tan(\alpha + \beta) = \cot 70°$
$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos 84°$

A) $\alpha = 12°; \beta = 8°$ B) $\alpha = 14°; \beta = 6°$
C) $\alpha = 13°; \beta = 7°$ D) $\alpha = 8°; \beta = 2°$
E) $\alpha = 70°; \beta = 13°$

4 Calcula: $E = \dfrac{\text{sen}10° + \tan 20° + \sec 30°}{\csc 60° + \cot 70° + \cos 80°}$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) –2

5 Calcula x en:
$\tan x \tan 50° \tan 40° \tan 30° = 1$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

6 Calcula θ (α; β y θ son agudos)en:
$\text{sen}3\alpha = \cos 75°$
$\tan 2\beta = \cot 80°$
$\sec(\alpha + \beta) = \csc\theta$

A) $\frac{\pi}{9}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{2\pi}{9}$ rad
D) $\frac{4\pi}{9}$ rad E) $\frac{5\pi}{9}$ rad

7 Si:

$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 0$

$\cos\alpha \sec(3\beta - 10°) = 1$

Calcula: $\alpha - \beta$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

8 Si: $\dfrac{\operatorname{sen}(2x + 25°)\cos 56°}{\cos(x + 5°)\operatorname{sen}34°} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2}$

Halla:

$E = [\cos(2x + 10°) - \operatorname{sen}2x + 2]\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

9 Simplifica:

$E = \dfrac{4\operatorname{sen}x}{\cos(90° - x)} + \dfrac{2\operatorname{sen}10°}{\cos 80°} + \dfrac{\tan 72°}{\cot 18°}$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

10 Si:

$\operatorname{sen}(2x + y)\csc(2y + 30°) = 1$

$\tan(x + 30°) = \cot(y + 30°)$

Calcula: $3x - 2y$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

11 Calcula x, donde:

$\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - 5x\right) = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{9}\right)$

A) $\dfrac{\pi}{4}$ rad B) $\dfrac{2\pi}{9}$ rad C) $\dfrac{3\pi}{10}$ rad
D) $\dfrac{\pi}{9}$ rad E) $\dfrac{5\pi}{9}$ rad

12 Halla x en la siguiente expresión:

$\operatorname{sen}(5x - 1)° \sec 61° \csc 73° \cos 17° = 1$

A) 5 B) 8 C)7
D) 3 E) 6

13 Si:

$\csc(n + 45)° = \sec(m - 15)°$

Calcula: $\dfrac{m + n}{2}$

A) 30 B) 60 C) 15
D) 90 E) 20

14 Se tiene:

$\sec(41 - a)° \,.\, \cos(37 + b)° = 1$

Calcula: $(a + b)^2$

A) 4 B) 16 C) 25
D) 9 E) 1

Claves

1. E	3. C	5. E	7. C	9. D	11. B	13. A
2. C	4. B	6. D	8. E	10. D	12. E	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

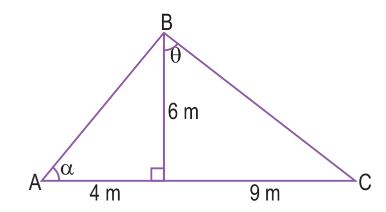
I. El seno de un ángulo agudo no es igual al coseno de su ángulo complementario.

II. La tangente del ángulo complementario a α es igual a la cotangente de dicho ángulo.

III. Para α y θ complementarios la secante de α y la cosecante de θ son equivalentes.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFV

2. Del triángulo:



¿Qué se puede afirmar de los ángulos α y θ?

I. Son iguales.

II. La semisuma de α y θ es igual a 45°.

III. Son ángulos complementarios.

A) Solo III B) Solo I C) I y III
D) II y III E) I y II

Razonamiento y demostración

3. Si: $\tan 3x \tan(2x + 20°) = 1$, halla x.

A) 8° B)14° C) 5°
D) 2° E) 10°

4. Halla x, si: $\text{sen}4x\csc(x + 30°) = 1$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

5. Halla x, si: $\cos(3x - 10°)\sec(x + 20°) = 1$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

6. Si: $\tan 2x \cdot \cot(60° - x) = 1$, calcula: x

A) 20° B) 80° C) 30°
D) 60° E) 45°

7. Sabiendo: $\text{sen}a = \cos b$

Halla: $W = \dfrac{\text{sen}b}{\cos a}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. Si: $\text{sen}2x \cdot \csc(3x - 1°) = 1$.
Luego el valor de x será:

A) 1° B) 3° C) 5°
D) 2° E) 4°

9. Halla x, si: $\text{sen}\,4x \cdot \csc(x + 30°) = 1$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

10. Halla x, si: $\cos(3x - 10°) \cdot \sec(x + 20°) = 1$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

11. Halla x, si: $\tan 5x \cdot \cot(x + 20°) = 1$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

Resolución de problemas

12. Sean los ángulos α y β donde la suma de la mitad de α más la tercera parte de β es igual a 15°. Calcula el doble del cociente del seno de 3α y el coseno de 2β.

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 4 E) 3

13. El seno del ángulo agudo 3a es igual al coseno de 2a. Calcula el valor de E, donde:

$$E = \frac{(\text{sen}a + \cos 4a)\csc a}{2}$$

A) 3 B) 1 C) 2
D) 1/2 E)1/3

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Sean los ángulos agudos a, b y c, donde:

$\sec a \cdot \cos b = 1$
$\sec c = \csc b$
Indica lo incorrecto:

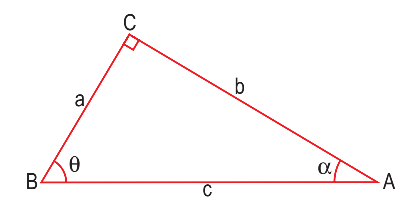
I. a y c son complementarios.

II. b y c son equivalentes.

III. b y c son ángulos agudos en un triángulo rectángulo.

A) Solo III B) I y II C) II y III
D) I y III E) Solo II

15. Del gráfico mostrado:



donde:

$a^2 + b^2 = c^2$; $a \neq b$

Indica el valor de verdad:

I. $\tan\theta$ es igual a la $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

II. $\tan\theta \tan\alpha$ es igual a la unidad.

III. $\frac{5\csc\alpha}{2\sec\theta}$ es igual a la unidad.

A) FVV B) VFF C) FVF
D) VFV E) FFF

Razonamiento y demostración

16. Calcula:

$E = (3\text{sen}36° + 4\cos 54°)\csc 36°$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

17. Calcula:

$C = \frac{\text{sen}10°}{\cos 80°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

18. Si: $\tan(2x - 16°)\tan(x + 40°) = 1$, calcula: x

A) 10° B) 22° C) 20°
D) 15° E) 25°

19. Calcula:

$E = (2\text{sen}10° + 3\cos 80°)\csc 10°$

A) 2 B) 8 C) 5
D) 3 E) 6

20. Se sabe: $\tan\alpha = \cot 2\alpha$

Calcula: $\frac{\text{sen}\alpha + \cos 2\alpha}{\text{sen}\alpha}$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 1/2 E) 3

21. Si: $\tan(b + 15°) . \cot(2b - 5°) = 1$,

halla un valor de b.

A) 20° B) 15° C) 10°
D) 16° E) 12°

22. Dada la siguiente expresión:

$\cos(x + 5°) . \csc(3x + 5°) = 1$

Halla un valor de x.

A) 10° B) 30° C) 55°
D) 20° E) 40°

23. Calcula n:

$\text{sen}\left(\frac{n+m}{2} - 17°\right) = \cos\left(\frac{n-m}{2} + 63°\right)$

A) 36° B) 45° C) 22°
D) 44° E) 27°

Resolución de problemas

24. Calcula el valor de α en el sistema radial si se cumple que el triple de dicho ángulo tiene como seno al coseno de la mitad de α, aumentado en 20°. $\left(\text{Se cumple: } 3\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$

A) $\frac{\pi}{6}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad

D) $\frac{\pi}{9}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

25. Para dos ángulos agudos se cumple que el producto de sus senos es igual al producto del coseno de uno de ellos y el coseno de 70°. Calcula la suma del doble del menor más la mitad del mayor de dichos ángulos si son complementarios.

A) 60° B) 75° C) 25°
D) 18° E) 45°

NIVEL 3

Comunicación matemática

26. Si se cumple: $a + b + c = 90°$

Marca lo incorrecto.

A) $\tan(a - b) = \cot(2b + c)$

B) $\text{sen}(3b - 5c + 2a) = \cos(6c - a - 2b)$

C) $\tan\left(90° + \frac{3c}{5} + \frac{b}{2} - \frac{a}{3}\right) = \cot\left(\frac{4a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{2c}{5}\right)$

D) $\csc\left(\frac{b+c}{2} + \frac{a}{3}\right) = \sec\left(\frac{4a+3b+3c}{6}\right)$

E) Ninguna

27. De la expresión:

$\text{sen}\theta\sec\alpha\tan(37° + 2p)\tan(p - 13°) = 1$

Si θ y α son complementarios, indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. p es igual a $\frac{11\pi}{90}$ rad.

II. $(4p + 1°)$ y 5p son complementarios.

III. $\tan(2p - 15°)$ y $\cot(95° - 3p)$ son recíprocos.

A) VFV B) VFF C) VVV
D) FFV E) FVF

Razonamiento y demostración

28. Calcula:

$E = [\cos 20° \sec 20° + \tan 58° \cot 58°]^{\text{sen}10° .\csc 10°}$

A) 4 B) 6 C) 210
D) 2 E) 8

29. Calcula α (agudo).

$\cos(\alpha + 10°) = \dfrac{1}{\csc(\alpha + 10°)}$

A) 35° B) 30° C) 45°
D) 46° E) 37°

30. Halla (x + y + z); si: x; y; z son agudos.

$\text{sen}(x + 60°) = \cos(y - 37°)$

$\tan(45° + x) = \cot(z - 37°)$

$\sec(z + 30°) = \csc(y - 15°)$

A) 112° B) 102° C) 128°
D) 132° E) 121°

31. Si se cumple $\text{sen}(2a + b) = \cos(a + 2b)$

Calcula: $P = \dfrac{\text{sen}3a}{\cos 3b} + \dfrac{\text{sen}3b}{\cos 3a}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. Si: $\text{sen}2x = \cos 40°$

$\tan 3x \cot y = 1$

Halla: y – x.

A) 35° B) 50° C) 20°
D) 40° E) 80°

33. Si: $\text{sen}2x \csc(48° - x) = 1$

$\tan 4x \cot 8y = 1$

Calcula: x/y

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

34. Si: $\text{sen}2x = \cos 5x$, calcula:

$E = \tan 3x . \tan 4x + \text{sen}x . \sec 6x$

A) 5 B) 1 C) 3
D) 2 E) 0

35. Halla (a + b) en las siguientes expresiones:

$\text{sen}(a + 30°) = \cos(4a + 10°)$

$\tan(b + 20°) \cot 50° = 1$

Siendo a y b ángulos agudos.

A) 10° B) 30° C) 50°
D) 20° E) 40°

Resolución de problemas

36. El producto de cinco razones trigonométricas diferentes de un mismo ángulo es 1. ¿Qué ángulo es?

A) 60° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°

37. En un triángulo acutángulo que tiene como ángulos a, b y c, calcula el valor de $\dfrac{3m}{2}$, donde:

$$m = \frac{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)\sec\left(\frac{c+b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\cos\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\csc\frac{a}{2}}$$

A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 3/4 E) 1/2

Claves

NIVEL 1
1. C
2. B
3. B
4. B
5. C
6. A
7. A
8. A
9. B
10. C
11. A
12. B
13. B
14. E
15. C

NIVEL 2
16. D
17. B
18. B
19. C
20. B
21. A
22. D
23. D
24. D
25. B
26. C
27. A

NIVEL 3
28. D
29. A
30. A
31. B
32. B
33. B
34. D
35. E
36. D
37. B

MARATÓN Matemática

- Halla el valor de 2a + b, si $\frac{\pi}{8}$ rad = a°b'.

Resolución:

- Sabemos: π rad = 180°

$\frac{\pi}{8} \text{ rad} \times \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = a°b'$

$\frac{180°}{8} = a°b' \Rightarrow \frac{45°}{2} = a°b'$

$22° + \frac{1°}{2} = a°\,b'$

$22°30' = a°b' \Rightarrow a = 22 \wedge b = 30$

Nos piden: 2a + b

$2a + b = 2(22) + 30$

$\therefore 2a + b = 74$



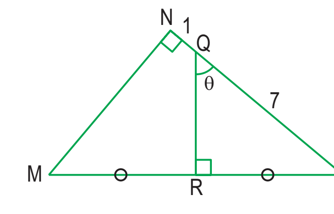
1. Para un ángulo trigonométrico se cumple lo siguiente:

$\frac{S}{3} - 12 = x + 3 \qquad \frac{C}{2} + 6 = x + 31$

Determina la medida del ángulo en radianes.

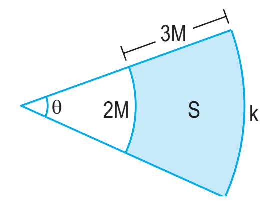
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{5}$

2. En la figura mostrada, halla el valor de $\tan^2\theta$.



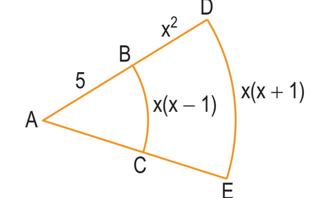
A) 2
B) 1
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{1}{2}$

3. Se muestran sectores circulares concéntricos, donde S representa al área sombreada. Halla el valor de k, si $S = 12M^2$.



A) 6M
B) 8M
C) 5M
D) 3M
E) 9M

4. Del gráfico, halla el valor de: $P = x^2 - x^3 + 15$

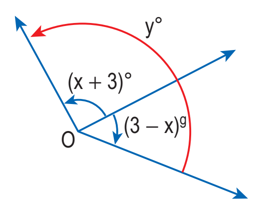


A) 15
B) 10
C) 20
D) 0
E) 5

5. ¿Cuántos segundos sexagesimales están contenidos en un ángulo que equivale a la milésima parte del ángulo de dos vueltas?

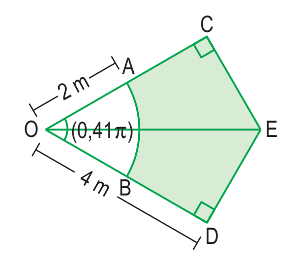
A) 3888" B) 2592" C) 1296"
D) 1944" E) 2916"

6. En el siguiente gráfico, determina el valor de:
P = 19x – 10y



A) 9
B) 4
C) 6
D) –6
E) –3

7. Del gráfico mostrado, calcula el perímetro de la región sombreada. (O es centro; OE = 5 m).
(Considera π = 3,14)

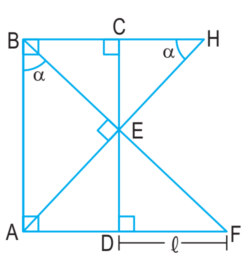


A) 12,57 m B) 6,27 m C) 18,81 m
D) 10,54 m E) 14,27 m

8. Calcula la tangente del mayor ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuyos lados forman una progresión geométrica.

A) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ C) $\sqrt{\sqrt{5}+1}$
D) $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ E) 1

9. Del gráfico, halla el valor de AB en función de "α" y "ℓ".



A) $\ell \operatorname{sen}\alpha \csc^3\alpha$ B) $\ell \cos\alpha \csc^3\alpha$ C) $\ell^2 \cos\alpha \sec^3\alpha$
D) $\ell \cos^2\alpha \csc^2\alpha$ E) $\ell \operatorname{sen}^2\alpha \csc^3\alpha$


Unidad 2

RECUERDA

Menelao

Nace en el 70 d. C. y muere en el 140 d. C. Su nombre ha quedado ligado al teorema de geometría plana o esférica relativo a un triángulo cortado por una recta o un gran círculo, un teorema de gran importancia en la trigonometría antigua.

Muy poco se sabe de la vida de Menelao. Todo lo que se puede deducir es que pasó algún tiempo en Roma, que vivió en Alejandría, posiblemente nacido allí, y más tarde se trasladó a Roma.

Compuso “El Libro de las proposiciones esféricas”, “Sobre el conocimiento de los pesos y distribución de los diferentes órganos” … Tres libros sobre los “Elementos de Geometría”, y “El libro sobre el Triángulo”.

De los muchos libros de Menelao solo ha sobrevivido *Sphaerica*. Se trata de triángulos esféricos y su aplicación a la astronomía. Él fue el primero en escribir la definición de un triángulo esférico.

Un triángulo esférico es el espacio comprendido por arcos de círculos en la superficie de una esfera. Estos arcos son siempre menos que un semicírculo.

En *Sphaeria* creó la base de triángulos esféricos. Usó grandes arcos de círculos en lugar de arcos de círculos paralelos de la esfera. Esto marca un punto de inflexión en el desarrollo de la trigonometría esférica. Sin embargo, Menelao parece satisfecho con el método de la prueba por reducción al absurdo de Euclides que frecuentemente utiliza. Menelao se evita de esta manera demostrar teoremas y, en consecuencia, da pruebas de algunos de los teoremas que podría ser la prueba de Euclides puede ser adaptado en el caso de los triángulos esféricos por métodos muy diferentes.

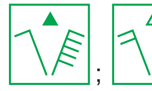
Produjo una versión triángulo esférico de este teorema que también se llama hoy en día teorema de Menelao, y la primera propuesta aparece en el libro III. Teniendo en cuenta la declaración en cuanto a la intersección de círculos máximos sobre una esfera.

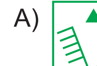
Reflexiona

- *Lo peor que puedes hacer es dañar y creer que saldrás ileso, porque una fuerza de equilibrio se alzará sobre ti, y te cobrará tarde o temprano.*
- *Discutir con nuestra conciencia es, a veces desagradable. Nos deja callados y sin argumentos. ¡La conciencia es la amiga a la cual debemos recurrir!*
- *Después de la tormenta, las aguas toman su nivel y cada persona termina estando donde debe estar. El corrupto será destruido y el honesto será levantado.*

¡Razona...!

¿Qué figura sigue?

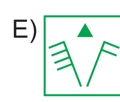
 ;  ;  ;  ; ...

A)  

B) 

C) 

D) 

E) 

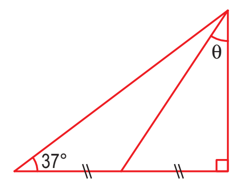


Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: RT DE ÁNGULOS NOTABLES

1 Calcula $\tan\theta$.



A) 1/2 B) 2/3 C) 3/2 D) 2 E) 2/5

2 Halla $\tan\alpha$; (α es agudo).

Además: $\cos\alpha = \dfrac{\cot 45°}{2}$

A) 3/4 B) 1/2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) 2

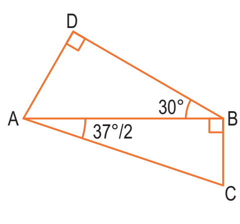
3 Si: $\text{sen}4x\csc(x + 60°) = 1$.
Calcula: $\tan(2x + 5°)$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1/2 E) 1/3

4 Si: $\tan 2x \cot 40° = 1$.
Halla: $\text{sen}3x$

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{4}{5}$

5 Calcula BC, si AD = 3.



A) 2 B) 12 C) 8 D) 9 E) 18

6 Calcula M de la siguiente expresión:

$M = \sqrt{2}\csc 8° + \sqrt{3}\tan 60° + \sqrt{10}\csc\dfrac{37°}{2}$

A) 22 B) 17 C) $\sqrt{3} + 18$
D) 23 E) $3\sqrt{10} + 4\sqrt{3}$

7 Si: sec2x = cscx.
Halla: L = cscx + sec2x

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

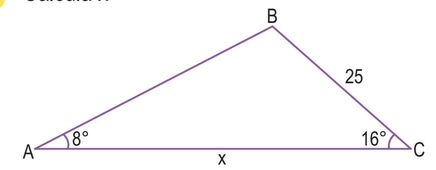
8 Siendo: sen3x = cos2x
Calcula: $Q = \text{sen}^2\left(\frac{5x}{3}\right) . \tan(3x - 1°)$

A) 9/16 B) 16/9 C) 1/3 D) 2 E) 4

9 Sabiendo que: tan3xcot(x + 40°) = 1
Calcula: sen3x. (x es agudo)

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

10 Calcula x



A) 70 B) 100 C) 63 D) 49 E) 73

11 Calcula el valor de P.

$P = \cos\frac{143°}{2} . \sqrt{10} + \text{sen}\frac{127°}{2} . \sqrt{20} + \sec 82° . \sqrt{2}$

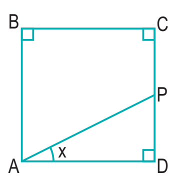
A) 10 B) 9 C) 7 D) 12 E) 15

12 Calcula P, cuando x es igual a 30°.

$\cos 2x = \frac{P - 1}{P + 1}$

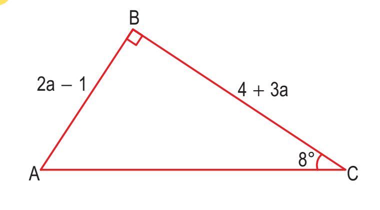
A) 10 B) 9 C) 3 D) 12 E) 15

13 Halla tan2x, si P es punto medio de $\overline{CD}$ (donde ABCD es cuadrado).



A) 1/2 B) 3/4 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 4/3

14 Calcula 2a.



A) 2 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

Claves

1. B 2. D 3. A 4. B 5. A 6. D 7. C 8. C 9. C 10. E 11. E 12. C 13. E 14. A

Practiquemos



NIVEL 1

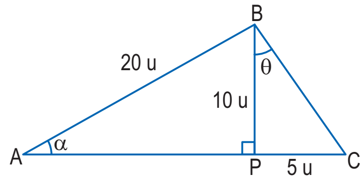
Comunicación matemática

1. Marca la alternativa correcta:

A) $\sec 30° = 2$ B) $\csc 8° = \frac{5\sqrt{2}}{7}$ C) $\cot 16° = \frac{24}{7}$

D) $\text{sen}\frac{53°}{2} = \frac{4}{5}$ E) $\tan 45° = \sqrt{2}$

2. Del triángulo:



Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. 2α es igual a 30°.

II. AC es igual a 15 u.

III. El complemento de 2θ es igual a 37°.

A) FVV B) FFV C) FVF D) VVF E) VFV

Razonamiento y demostración

3. Halla el valor numérico de:

$P = \tan 45° + \sqrt{3}\tan 30° + \tan^2 60°$

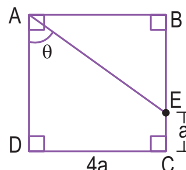
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4. Halla E(15°), si:

$E(x) = \text{sen}^2 2x + \tan^2 3x - \sec 4x$

A) –7/2 B) –3 C) –3/2 D) –3/4 E) –3/8

5. Según la figura, ABCD es un cuadrado; CD = 4a; EC = a. Halla $\tan\theta$.



A) 3 B) 3/2 C) 3/4 D) 4/3 E) 1/2

6. Calcula: $W = \tan 45° + \text{sen}60° \,.\, \cos 30° + \text{sen}^2 45°$

A) 8/4 B) 11/4 C) 9/4 D) 10/4 E) 6/5

7. Calcula: $M = \tan 2x \sec 3x \,\text{sen} 4x$, si $x = 15°$.

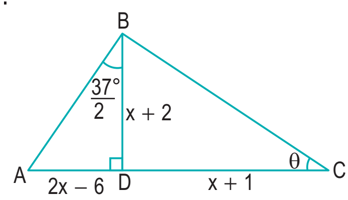
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{8}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{9}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Si: $x = 30°$, halla:

$E = \sec x \tan 2x - 2\cot\left(\frac{3x}{2}\right)$

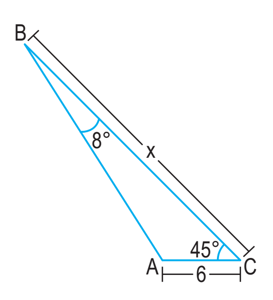
A) 5 B) 3 C) 0 D) 9 E) 7

9. Calcula $\tan\theta$.



A) 3/4 B) 1/3 C) 5/2 D) 6/5 E) $\sqrt{3}/2$

10. Calcula x.



A) 10 B) $6\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) 24

Resolución de problemas

11. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se cumple que $3\tan A = \tan C$. Calcula el coseno del menor de sus ángulos agudos.

A) 1/2 B) 1 C) 1/3 D) $\sqrt{3}/3$ E) $\sqrt{3}/2$

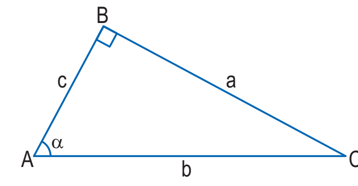
12. En un triángulo equilátero ABC se ubica el punto P en $\overline{BC}$, tal que 2BP = PC. Calcula la tangente del ángulo PAB.

A) 1/3 B) $\sqrt{3}/5$ C) 2/5 D) 2/3 E) $\sqrt{3}/2$

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. En la figura:



Relaciona correctamente la proporción entre los lados y la medida del ángulo α.

I. $\frac{a}{c} = \frac{3}{4}$ a. $\alpha = 8°$

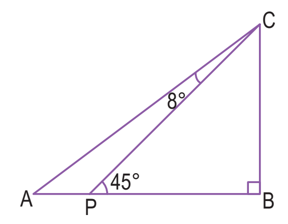
II. $\frac{b}{c} = \frac{5\sqrt{2}}{7}$ b. $\alpha = 74°$

III. $\frac{a}{b} = \frac{24}{25}$ c. $\alpha = 37°$

A) Ia IIc IIIb B) Ib IIa IIIc C) Ic IIa IIIb

D) Ib IIc IIIa E) Ic IIb IIIa

14. Del gráfico:



Indica las proposiciones incorrectas:

I. La razón de AC y PB es de $\frac{5}{3}$. ☐

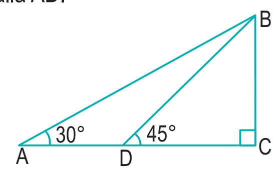
II. BC es el triple de AP. ☐

III. AB es la cuarta parte de AP. ☐

A) I y II B) Solo II C) I y III
D) Solo I E) Solo III

Razonamiento y demostración

15. Si: DC = 4 m, halla AD.



A) $4\sqrt{3}$ m B) $4\sqrt{3}-1$ m C) $4(\sqrt{3}-1)$ m
D) $4(\sqrt{3}+1)$ m E) $4(\sqrt{3}-3)$ m

16. Calcula x en:
$2x\text{sen}30° + \cos^2 60° = \sqrt{3}\tan 60° + 2x\tan 45°$

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{7}{4}$ C) $-\frac{13}{4}$
D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{11}{4}$

17. Calcula:
$E = (\sec 60° + \tan 45°)\sec 53° + \sqrt{6}\tan 60° \,.\, \sec 45°$

A) 7 B) 11 C) 9
D) 10 E) 13

18. Calcula el valor de M:

$$M = \sqrt{\frac{\text{sen}^2 30° + \sec^3 60° - \cos^4 45°}{\tan 37° \,.\, \tan 53° \,.\, \cot 45° \,.\, \csc^6 45°}}$$

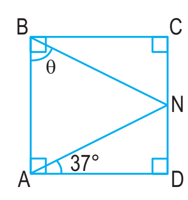
A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 3 E) 1/3

19. Calcula el valor de:

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\cos^2 60° \,.\, \sec 30° \,.\, \tan 45°}{\sec^2 45° - 6\cos 30° + \tan^3 60°}}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 3 E) 1/3

20. Del gráfico, calcula $\tan\theta$ si ABCD es un cuadrado.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5/2 E) 7/2

21. Si: $\cos\theta = \cos^2 60°$; θ es agudo.
Calcula: $C = \sec\theta + \tan^2\theta$

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

Resolución de problemas

22. En un cuadrado ABCD se ubica un punto P en $\overline{AB}$, tal que el triángulo CPD es isósceles, calcula la longitud de sus lados iguales si el lado del cuadrado es igual a 6.

A) $4\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$
D) $6\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{5}$

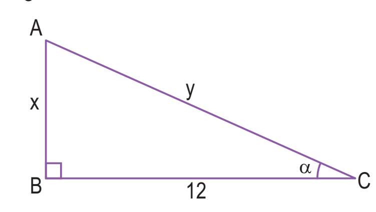
23. En una semicircunferencia $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto C tal que $m\overset{\frown}{AC} = 74°$. Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$. Si el radio de la circunferencia es igual a 25, calcula la longitud de $\overline{BH}$.

A) 24 B) 8 C) 20
D) 50 E) 32

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Dado el triángulo ABC:



Relaciona el valor de α y la medida de sus lados correctamente.

I. $\alpha = 37°$ — a. x = 9

II. $\alpha = \frac{53°}{2}$ — b. x = 6

III. $\alpha = \frac{37°}{2}$ — c. x = 4

A) Ib IIa IIIc B) Ia IIc IIIb C) Ic IIb IIIa
D) Ia IIb IIIc E) Ib IIc IIIa

25. Marca la alternativa correcta.

A) $\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sec\frac{127°}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

C) $\text{sen}\frac{143°}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ D) $\text{sen}82° = \frac{\sqrt{10}}{3}$

E) $\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

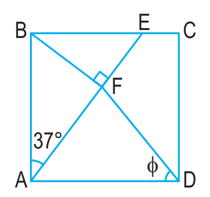
Razonamiento y demostración

26. Si: $37x\tan^2 30° - 5x\sec^2 30° = 7\tan 45° + 5\sec 60°$

Calcula: $P = \tan^2 15x + \cot^2 10x$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

27. Del gráfico, calcula $\tan\phi$, si: ABCD es un cuadrado.



A) $\frac{13}{6}$ B) $\frac{13}{12}$ C) $\frac{16}{13}$

D) $\frac{9}{7}$ E) $\frac{9}{8}$

28. Calcula M + N, si:

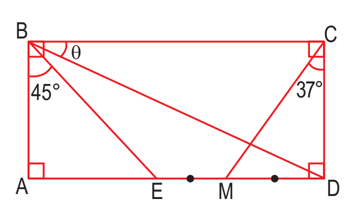
$M = \sqrt{6}\,\text{sen}30°\,\cos 45°\,\tan 60°$

$N = \tan 30°\,\tan 45°\,\tan 60°$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{2}$

D) 4 E) 5

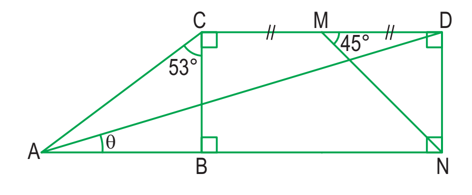
29. Del gráfico, halla $\tan\theta$.



A) 0,3 B) 0,4 C) 0,8

D) 1,6 E) 1,8

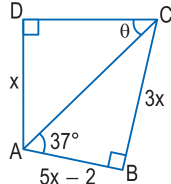
30. Del gráfico, calcula $\tan\theta$.



A) 0,1 B) 0,3 C) 0,4

D) 0,6 E) 0,8

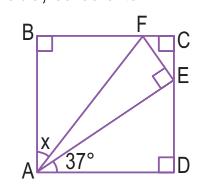
31. Del gráfico, halla $\text{sen}\theta$.



A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3

D) 0,4 E) 0,5

32. Si ABCD es un cuadrado, calcula $\tan x$.



A) 13/15 B) 13/16 C) 13/17

D) 17/16 E) 15/13

Resolución de problemas

33. En un cuadrilátero ABCD recto en B, $\overline{AB}$ = 20 m. Calcula la distancia entre los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, si m∠BAC = 37°.

A) 16 m B) 12 m C) 15,5 m

D) 12,5 m E) 6,25 m

34. En el rombo ABCD (AC > BD) se ubica el punto P en $\overline{AC}$, tal que m∠PBC = 90°. Si AP = BP, calcula:

$M = 5\text{sen}^2(\alpha - 7°) + \text{sen}^2\frac{(2\alpha + 23°)}{2}$

A) 2 B) 4,1 C) 2,1

D) 5 E) 3,2

Claves

NIVEL 1
1. C
2. B
3. A
4. D
5. D
6. C
7. E
8. C
9. D
10. C
11. E
12. B
13. C
14. E

NIVEL 2
15. C
16. E
17. B
18. A
19. C
20. C
21. E
22. B
23. E

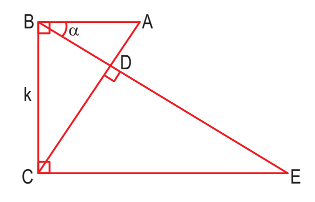
NIVEL 3
24. D
25. C
26. C
27. C
28. B
29. B
30. B
31. B
32. B
33. D
34. B

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1 Calcula DE en términos de k y α.

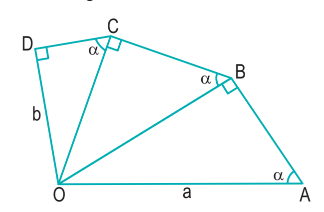


A) $k\cos\alpha\cot\alpha$ B) $\cos\alpha\cot\alpha$ C) $k\cos\alpha$
D) $k\cot\alpha$ E) $k\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

2 Calcula BA en términos de L y α.

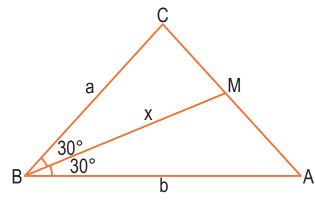
A) $L\sec^2\alpha$ B) $L\csc^2\alpha$ C) $L\operatorname{sen}^2\alpha$
D) $L\cos^2\alpha$ E) $L\tan^2\alpha$

3 De la figura calcula $\operatorname{sen}\alpha$, en función de a y b.



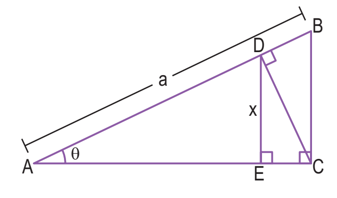
A) $\sqrt[2]{\frac{b}{a}}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ D) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ E) $\frac{a}{b}$

4 Halla x en función de a y b.



A) $\frac{a+b}{ab}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{\sqrt{3}\,ab}{a+b}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{a+b}$ E) $\frac{1}{a+b}$

5 Halla x en términos de a y θ.

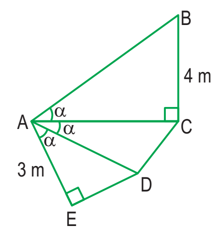


A) $a\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$ B) $a\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ C) $a\cos^3\theta$
D) $a\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ E) $a\operatorname{sen}^3\theta$

6 Halla x en términos de θ y d. Siendo O centro de la semicircunferencia, además: AP = d.

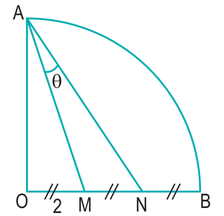
A) $\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ B) $\frac{d}{2}\cos\theta\tan\theta$ C) $\frac{d}{2}\cos\theta$
D) $\frac{d}{2}\cot\theta\sec\theta$ E) $\frac{d}{2}\cot\theta\csc\theta$

7 Halla el área del triángulo CAD.



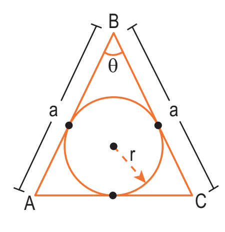
A) 6 m^2 B) 8 m^2 C) 12 m^2 D) 4 m^2 E) 9 m^2

8 Halla tanθ, si AOB es un cuadrante.



A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ E) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

9 Halla el radio del círculo en función de a y θ.

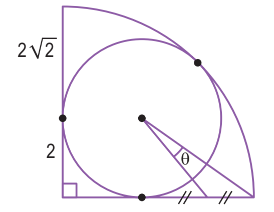


A) $\dfrac{a\cos\frac{\theta}{2}}{1+\csc\frac{\theta}{2}}$ B) $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{a+\csc\frac{\theta}{2}}$

C) $\dfrac{a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}$ D) $\dfrac{a\tan\frac{\theta}{2}}{1+\cot\frac{\theta}{2}}$

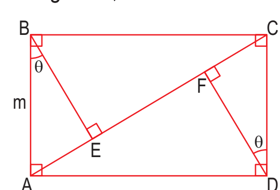
E) $\dfrac{a\csc\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}$

10 Halla cscθ.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

11 Del gráfico, halla EF en términos de "m" y "θ".



A) mcosθ – 2msenθ B) mcotθ – 2mtanθ
C) mcscθ – 2msenθ D) msecθ – 2mcosθ
E) mcscθ – 2mcosθ

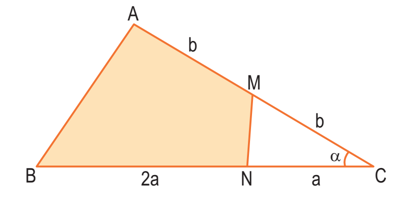
12 Del gráfico, halla el perímetro del triángulo ABC, si: AB = BC.

A) n(cscθ + 1) B) n(cscθ + 2)
C) n(secθ + 1) D) n(secθ + 2)
E) n(cotθ + 1)

13 Calcula el área de la región triangular ABC, sabiendo que CBD es un cuadrante.

A) $0,5a^2\operatorname{sen}\alpha$ B) $0,5a^2\tan\alpha$ C) $0,5a^2\sec^2\alpha$
D) $0,5a^2\csc\alpha$ E) $0,5a^2\cos\alpha$

14 Calcula el área de la región cuadrangular ABNM.



A) 1,5absenα B) 3,5absenα C) absenα
D) 2,5absenα E) 0,5absenα

Claves

1. A	3. C	5. B	7. A	9. A	11. C	13. E
2. B	4. C	6. E	8. A	10. B	12. A	14. D

Practiquemos

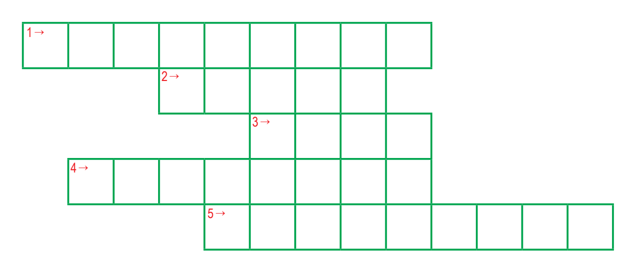


NIVEL 1

Comunicación matemática

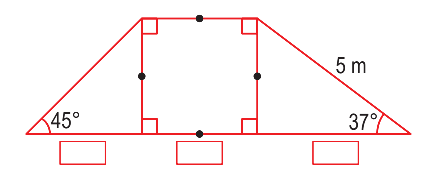
1. **Crucigrama**
Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre del matemático más prolífico de toda la historia.

1. Cateto que se encuentra al lado del ángulo.
2. Tipo de ángulo menor a 90°.
3. Línea de un polígono.
4. Cateto opuesto entre cateto adyacente.
5. Polígono de 3 lados.



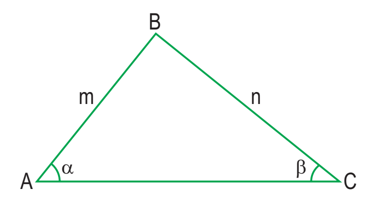
- ______: *matemático suizo, que es considerado el más prolífico por sus centenares de publicaciones.*

2. Observa el gráfico y luego completa:



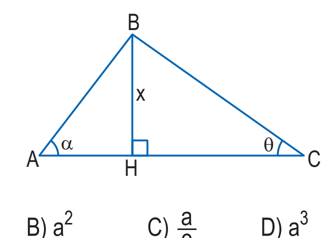
Razonamiento y demostración

3. Del gráfico, halla AC.



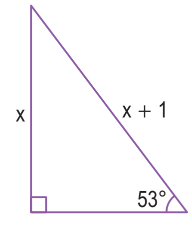
A) $m\operatorname{sen}\alpha + n\operatorname{sen}\beta$ B) $m\cos\alpha + n\cos\beta$
C) $m\operatorname{sen}\alpha + n\cos\beta$ D) $m\cos\alpha + n\operatorname{sen}\beta$
E) $m\cos\alpha + m\operatorname{sen}\beta$

4. Halla: $x(\cot\alpha + \cot\theta)$, si AC = a.



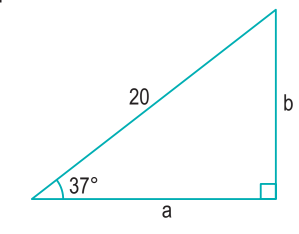
A) a B) a^2 C) $\frac{a}{2}$ D) a^3 E) 2a

5. De la figura, halla x.



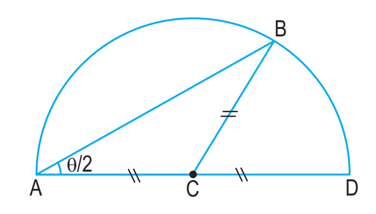
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Halla a + b.



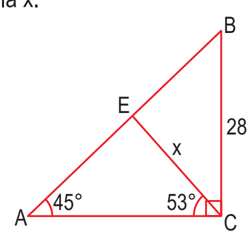
A) 21 B) 28 C) 35 D) 49 E) 63

7. Calcula el área de la región triangular ABC, si: AD = 4.



A) $2\operatorname{sen}\theta$ B) $4\operatorname{sen}\theta$ C) $2\operatorname{sen}2\theta$
D) $4\operatorname{sen}2\theta$ E) $2\cos2\theta$

8. Del gráfico, halla x.



A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

Resolución de problemas

9. Se tiene un triángulo ABC, donde $m\angle BCA + m\angle BAC = 45°$ y $AB = 5\sqrt{2}$ m. Determina el valor de BC, si $\tan\alpha = 5/12$. ($\alpha = m\angle BCA$).

A) 8 m B) 5 m C) 6 m D) 7 m E) 10 m

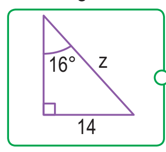
10. Se tiene un triángulo ABC, donde $m\angle BAC = \theta$; $m\angle BCA = \phi$; $m\angle ABC = 120°$, AB = 8m; BC = 6 m. Calcula $\tan\theta \cdot \cot\phi$.

A) 17/19 B) 14/23 C) 15/22
D) 14/29 E) 17/20

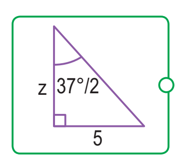
NIVEL 2

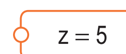
Comunicación matemática

11. Relaciona según corresponda:

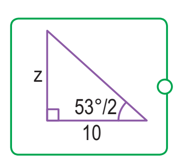


z = 15



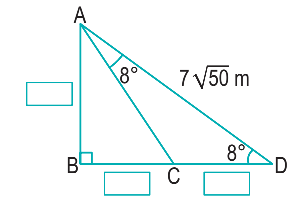


z = 5



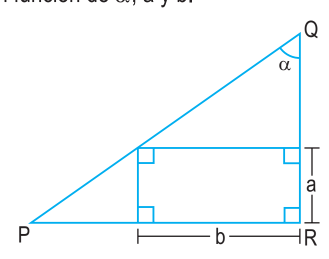
z = 50

12. Observa el gráfico y luego completa:



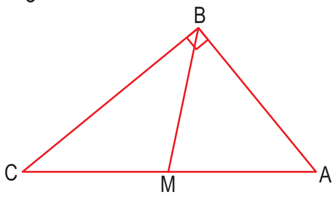
Razonamiento y demostración

13. Calcula PQ en función de α, a y b.



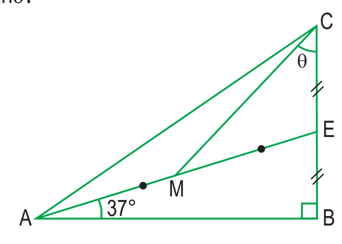
A) $a\csc\alpha + b\sec\alpha$ B) $a\cos\alpha + b\sen\alpha$
C) $a\sen\alpha + b\cos\alpha$ D) $a\sec\alpha + b\csc\alpha$
E) $a\sec\alpha + b\cos\alpha$

14. En la figura: $m\angle A - m\angle C = \theta$; AM = MC = a. Halla el área de la región triangular ABC.



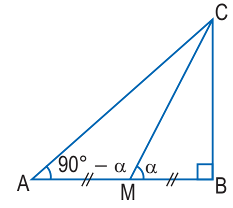
A) $a^2\sen\theta$ B) $a^2\cos\theta$ C) $a^2\tan\theta$
D) $a^2\cot\theta$ E) $a^2\sec\theta$

15. Calcula $\tan\theta$.



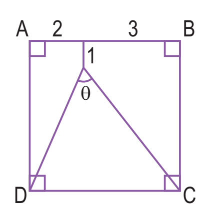
A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{4}{7}$

16. En la figura, halla $\tan\alpha$.



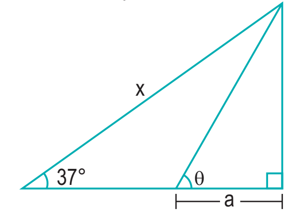
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) 0

17. Determina el $\sen\theta$, si ABCD es un cuadrado.



A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

18. Calcula x en función de a y θ.



A) $\frac{5}{3}a\sec\theta$ B) $\frac{5}{3}a\tan\theta$ C) $\frac{5}{3}\cot\theta$
D) $\frac{5}{3}a\csc\theta$ E) $\frac{4}{5}a\tan\theta$

Resolución de problemas

19. Se tiene un triángulo ABC, donde $m\angle BAC = \theta$; $m\angle BCA = \alpha$, además: AB = b y BC = a. Determina el valor de AC, si: $(b\cos\theta + a\cos\alpha) = 4$.

A) 4 B) 7 C) 5
D) 3 E) 6

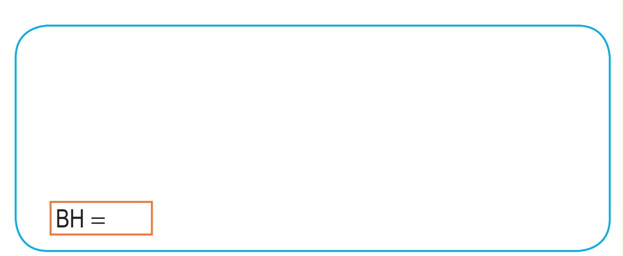
20. En un triángulo ABC se traza la ceviana BD($D \in \overline{AC}$), además, la $m\angle ABD = \alpha$ y $m\angle DBC = 37°$. Halla $\tan\alpha$, si: $AB = AD = DC$.

A) 1/2   B) 3/5   C) 3/4   D) 2/3   E) 9/4

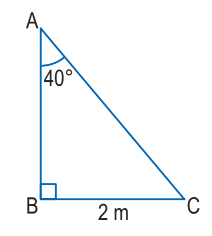
NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Dibuja un triángulo rectángulo ABC, recto en B, traza la altura BH, donde $\overline{HE} \perp \overline{AB}$, indica en el gráfico el ángulo BHE que mide 37°, además: EH = 4 m. Determina la altura.



22. Sea:

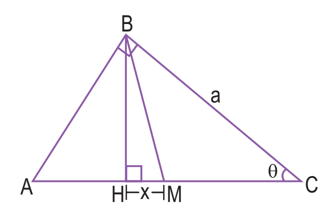


Indica verdadero a falso, según corresponda:

- $AB = 2\tan 50°$ ☐
- $AB = 2\tan 40°$ ☐
- $AC = 2\sec 50°$ ☐
- $AC = 2\sec 40°$ ☐

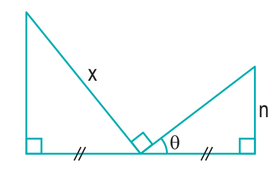
Razonamiento y demostración

23. Halla x en función de a y θ. Si $\overline{BH}$: altura; $\overline{BM}$: mediana



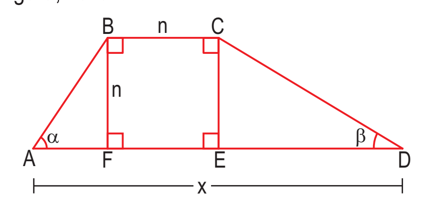
A) $a\,\text{sen}\theta\cot\theta$ B) $a\,\text{sen}\theta\tan\theta$ C) $a\,\text{sen}\theta\tan 2\theta$
D) $a\,\text{sen}2\theta\cot\theta$ E) $a\,\text{sen}\theta\cot 2\theta$

24. Halla x, en función de n y θ.



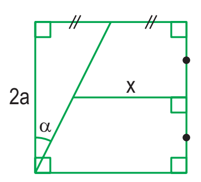
A) $\cot\theta\csc\theta$ B) $n\cot\theta\csc\theta$ C) $n\,\text{sen}\theta$
D) $n\csc\theta\tan\theta$ E) $n\cot\theta\sec\theta$

25. De la figura, halla x.



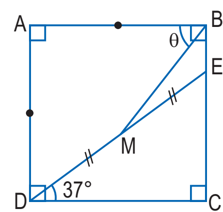
A) $n(\cot\alpha + \cot\beta)$ B) $n(\tan\alpha + \tan\beta)$
C) $n(\cot\alpha + \cot\beta + 1)$ D) $n(1 + \tan\alpha + \tan\beta)$
E) $n(\cot\alpha + \tan\beta)$

26. Halla x.



A) $2a\tan\alpha$ B) $4a\tan\alpha$ C) $a\tan\alpha$
D) $3a\tan\alpha$ E) $5a\tan\alpha$

27. Del gráfico, calcula $\tan\theta$.



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1   E) $\frac{5}{4}$

Resolución de problemas

28. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura DH relativa a la hipotenusa ($D \in \overline{BC}$; $H \in \overline{AC}$). Si HC = 1 m y $m\angle BAC = 37°$. Determina el valor de DC.

A) 1/2 m   B) 1/3 m   C) 3/5 m   D) 5/3 m   E) 2/5 m

29. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana AD y la ceviana DE ($D \in \overline{CB}$; $E \in \overline{AB}$). Además la $m\angle DAB = 37°$; $m\angle DEB = 60°$ y $m\angle ACB = 30°$. Determina el valor de CD, si: $AE = 2 - \sqrt{3}/2$.

A) $2\sqrt{3} - 2$ B) $2\sqrt{3} - 3$ C) $2\sqrt{3} - 4$
D) $2 - \sqrt{3}/2$ E) $2\sqrt{3} - 3/2$

Claves

NIVEL 1	7. A	13. D	20. E	26. D
1.	8. B	14. B	NIVEL 3	27. E
2.	9. D	15. C	21.	28. D
3. B	10. C	16. A	22.	29. E
4. A	NIVEL 2	17. C	23. E	
5. D	11.	18. B	24. B	
6. B	12.	19. A	25. C	

Aplicamos lo aprendido




TEMA 3: ÁNGULOS VERTICALES

1 Martín observa la parte superior de un muro con un ángulo de elevación θ. Cuando la distancia que los separa se ha reducido a su tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. Calcula la medida del ángulo θ.

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

2 Si a 20 m de un poste se observa su parte superior, con un ángulo de elevación de 37°, luego nos acercamos una distancia igual a su altura, siendo el nuevo ángulo de elevación θ. Calcula $\tan\theta$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3 Desde un punto en el suelo se ubica la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación de 37°, nos acercamos 5 m y el nuevo ángulo de elevación es 45°, halla la altura del árbol.

A) 8 m B) 10 m C) 12 m D) 15 m E) 18 m

4 Luis ve dos granos de trigo con ángulos de depresión de 30° y 45°. Si Luis mide 1,7 m de estatura, halla la distancia entre Luis y el grano más lejano, y la distancia entre granos.

A) $1{,}7\sqrt{3}$ m y 1,42 m B) $\sqrt{3}$ m y 2,24 m
C) 1,7 m y 1,24 m D) 2,2 m y $1{,}7\sqrt{3}$ m
E) $1{,}7\sqrt{3}$ m y 1,24 m

5 Una persona de 2 m de altura observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de 30°. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra, si esta mide 82 m?

A) $40\sqrt{2}$ m B) $4\sqrt{3}$ m C) 36 m
D) $32\sqrt{2}$ m E) $80\sqrt{3}$ m

6 Un niño de estatura 1,6 m observa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 53°. Si la separación entre el niño y el poste es 30 m, halla la altura del poste.

A) 40,7 m B) 35 m C) 41,6 m
D) 42 m E) 43,5 m

7 Desde la parte alta de un muro de 8 m de altura, se observa las partes alta y baja de un edificio con ángulos de elevación y depresión de 37° y 45°, respectivamente. Calcula la altura del edificio.

A) 14 m B) 15 m C) 16 m D) 17 m E) 18 m

8 Desde un avión se puede ver dos botes con ángulos de depresión de 45° y 30°; si el avión está a 400 m sobre el nivel del mar, halla la distancia entre los botes.

A) $400\left(\sqrt{3}-1\right)$ m B) $400\left(\sqrt{3}+1\right)$ m
C) $200\left(\sqrt{3}-1\right)$ m D) $200\left(\sqrt{3}+1\right)$ m
E) $400\left(\sqrt{2}-1\right)$ m

9 Desde un punto situado a 300 m; de la base de una torre, se observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuánto debe acercarse a la torre en línea recta para que al observar la parte superior de esta lo haga con un ángulo de elevación de 60°?

A) 100 m B) 150 m C) 250 m D) 180 m E) 200 m

10 Una persona de 2 m de estatura observa la base de un poste de luz con un ángulo de depresión de 30° y la parte superior con un ángulo de elevación de 60°. Calcula la altura del poste.

A) 8 m B) 6 m C) 4 m D) 10 m E) 12 m

11 Una hormiga observa la punta de un mástil con un ángulo de elevación θ, se acerca una distancia D en dirección al mástil y observa el mismo punto anterior con un ángulo de elevación β. Encuentra la altura del mástil.

A) $D(\cot\theta + \cot\beta)$ B) $D(\cot\theta - \cot\beta)$ C) $(\cot\theta - \cot\beta)/D$
D) $D/(\cot\theta - \cot\beta)$ E) $D/(\cot\theta + \cot\beta)$

12 Un avión está volando sobre una carretera recta que une dos ciudades separadas "d" m. En cierto instante observa una ciudad con un ángulo de depresión "α" y la otra con un ángulo de depresión β. Si la altura del avión a la carretera es "h" m, calcula "h" en términos de "d", "α" y "β".

A) $d/(\cot\alpha - \cot\beta)$ B) $d(\cot\alpha + \cot\beta)$ C) $d/(\cot\alpha + \cot\beta)$
D) $d(\cot\alpha - \cot\beta)$ E) $(\cot\alpha + \cot\beta)/d$

13 Desde un punto en tierra divisamos lo alto de un edificio con un ángulo de elevación ϕ. Nos acercamos una distancia igual al triple de la altura del edificio siendo el nuevo ángulo de elevación β. Calcula: $E = \cot\phi - \cot\beta$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 Desde un punto ubicado a 150 m del inicio de un camino inclinado un ángulo β respecto a la horizontal, se ve su parte más alta con un ángulo de elevación α. Si: $\cot\alpha - \cot\beta = 1/3$, ¿qué altura tiene el camino?

A) 50 m B) 80 m C) 450 m D) 350 m E) 240 m

Claves

1. B	3. D	5. E	7. A	9. E	11. D	13. C
2. C	4. E	6. C	8. A	10. A	12. C	14. C

Practiquemos

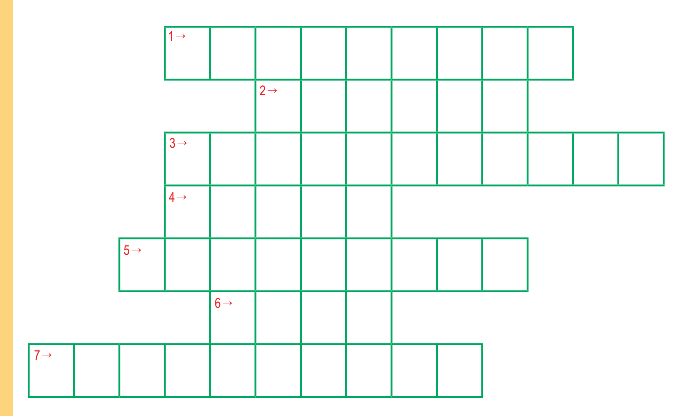


NIVEL 1

Comunicación matemática

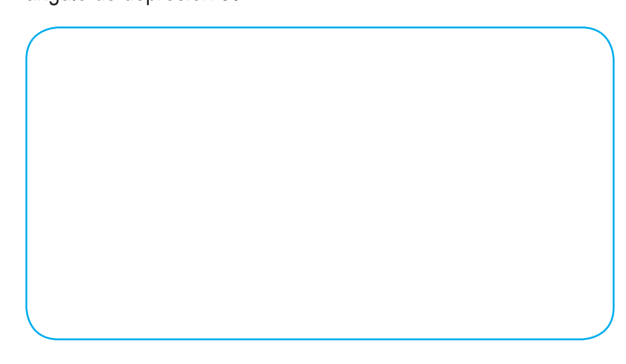
1. Crucigrama
Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.
2. Tipo de línea, que une el ojo de un observador con el objeto que se observa.
3. Ángulo formado por dos líneas visuales.
4. Tercera letra del alfabeto griego.
5. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.
6. Cateto opuesto entre hipotenusa.
7. Tipo de línea, paralela a la superficie, que pasa por el ojo del observador.



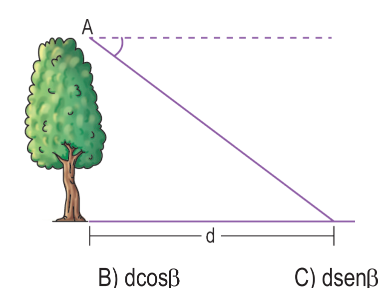
- ____________: matemático alemán, que definió el concepto de integral, lo que ahora llamamos integral de Riemann.

2. Dibuja según el enunciado.
Un niño de estatura h divisa una hormiga en el suelo con un ángulo de depresión θ.



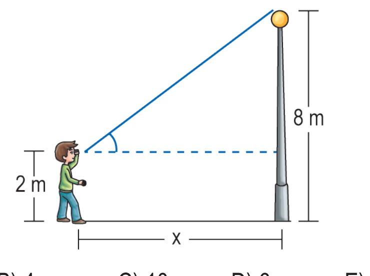
Razonamiento y demostración

3. Halla la altura del árbol.
Donde:
- El ángulo de depresión del punto A es: β



A) $d\tan\beta$ B) $d\cos\beta$ C) $d\text{sen}\beta$
D) $d\sec\beta$ E) $d\cot\beta$

4. Halla la distancia entre el joven y el poste.
Donde:
- El ángulo de elevacíon del joven es 37°.



A) 12 m B) 4 m C) 10 m D) 6 m E) 8 m

Resolución de problemas

5. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación α. Si la altura del edificio es h, ¿a qué distancia del edificio se encuentra el punto de observación?

A) $h\text{sen}\alpha$ B) $h\cos\alpha$ C) $h\tan\alpha$
D) $h\cot\alpha$ E) $h\sec\alpha$

6. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación β. Si el punto de observación está a 8 m de la base del poste, ¿cuál es la altura del poste?

A) $8\tan\beta$ B) $8\cot\beta$ C) $8\text{sen}\beta$ D) $8\cos\beta$ E) $8\csc\beta$

7. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación β ($\cot\beta = 2{,}5$). Si la altura del poste es 30 m, ¿a qué distancia del punto de observación, se encuentra el poste?

A) 25 m B) 50 m C) 75 m
D) 90 m E) 100 m

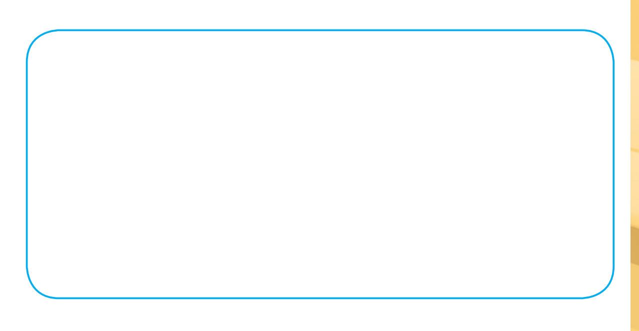
8. Desde lo alto de un edificio se divisa un objeto en tierra con un ángulo de depresión β ($\tan\beta = 2{,}5$) a una distancia de 40 m de su base, ¿cuál es la altura del edificio?

A) 100 m B) 125 m C) 75 m
D) 80 m E) 120 m

NIVEL 2

Comunicación matemática

9. Dibuja según el enunciado.
Desde lo alto de un poste se ve la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación α y desde lo alto del edificio se ve la base del poste con un ángulo de depresión β.



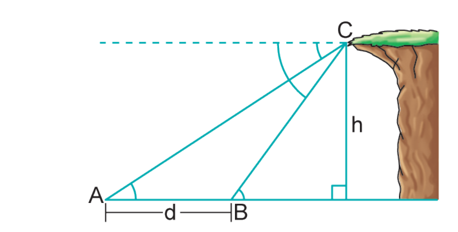
10. Completa el enunciado:

El _____, es aquel ángulo obtenido en un _____ formado por la _____ y la _____ que parten de la vista del _____.

A) Observador　　B) Línea horizontal
C) Ángulo vertical　　D) Plano vertical
E) Línea visual

Razonamiento y demostración

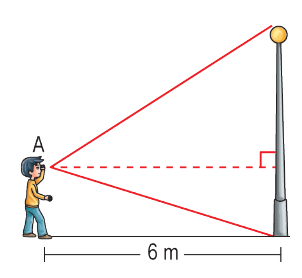
11. Halla la altura h del acantilado.
Donde:
- El ángulo de depresión del punto C al punto A es: β
- El ángulo de depresión del punto C al punto B es: α



A) $\dfrac{d}{\cot\beta - \cot\alpha}$　　B) $\dfrac{d}{\cot\beta + \cot\alpha}$　　C) $\dfrac{d\tan\alpha}{\tan\beta}$

D) $\dfrac{d\cos\alpha}{\cos\beta}$　　E) $\dfrac{d\,\text{sen}\alpha}{\cos\beta}$

12. Halla la altura h del poste.
Donde:
- El ángulo de elevación del punto A es: 53°
- El ángulo de depresión del punto A es: 37°/2



A) 15 m　　B) 6 m　　C) 8 m　　D) 12 m　　E) 10 m

Resolución de problemas

13. ¿Cuál es la medida del ángulo de depresión con que se ve un objeto en tierra, desde una torre de 24 m de altura; si la visual trazada mide 48 m?

A) 53°　　B) 60°　　C) 30°
D) 75°　　E) 45°

14. Un avión vuela en línea recta y horizontalmente a una altura de 2400 m, desde un punto en tierra es observado con un ángulo de elevación de 53°. Calcula la distancia entre dicho punto y el avión.

A) 2600 m　　B) 3000 m　　C) 4500 m
D) 5400 m　　E) 6000 m

15. Desde lo alto de una montaña de 120 m de altura, se divisa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de 32°. ¿A qué distancia de la base de la montaña se encuentra el objeto?

A) 190,324 m　　B) 192,04 m　　C) 196,1642 m
D) 168,171 m　　E) 120,32 m

16. Desde lo alto de un faro, se observa a un mismo lado; dos barcos anclados, con ángulos de depresión de 53° y 37°. Si los barcos están separados una distancia de 14 m, ¿cuál es la altura del faro?

A) 16 m　　B) 12 m　　C) 24 m　　D) 32 m　　E) 8 m

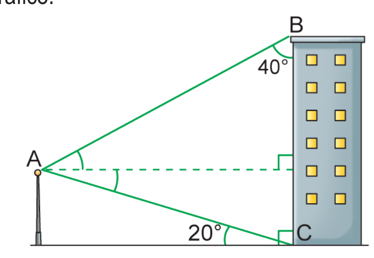
17. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación α. Nos acercamos una distancia igual al doble de la altura del edificio y el ángulo de elevación es ahora β. Calcula: $P = \cot\alpha - \cot\beta$

A) 1　　B) 2　　C) 3　　D) 4　　E) 6

NIVEL 3

Comunicación matemática

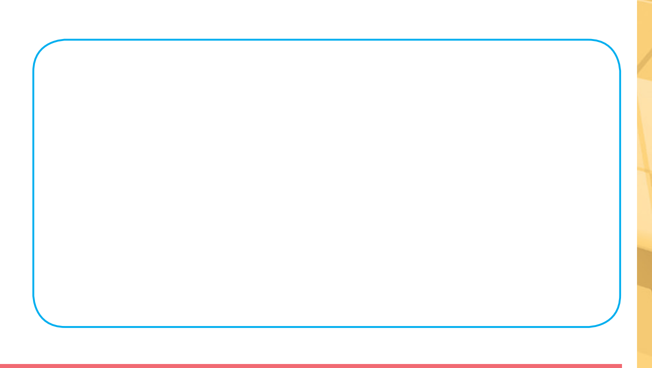
18. Según el gráfico:



Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. Desde A se observa a C con un ángulo de depresión de 20°.	
II. Desde B se observa a A con un ángulo de depresión de 40°.	
III. Desde A se observa a B con un ángulo de elevación de 50°.	

19. Dibuja según el enunciado:
Desde un punto en tierra se observa la parte más alta de un faro, con un ángulo de elevación θ. Si avanza "d" metros hacia el faro se observaría al punto anterior con un ángulo de elevación 2θ y a otro punto que está "x" metros más abajo que el primero con un ángulo de elevación θ.

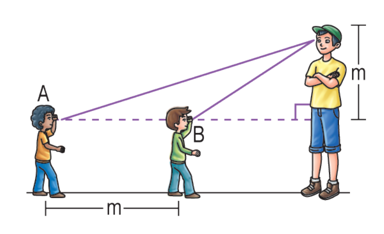


Razonamiento y demostración

20. Halla: $H = \cot\theta + \tan\theta$

Donde:

- El ángulo de elevación del punto A es: θ
- El ángulo de elevación del punto B es: $90° - \theta$

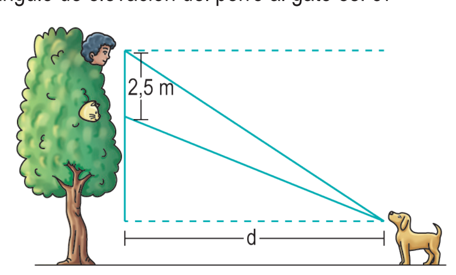


A) $\sqrt{5}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 3

21. Halla d.

Donde:

- El ángulo de depresión del niño es: 45°
- El ángulo de elevación del perro al gato es: 37°



A) 10 m B) 12 m C) 15 m D) 11 m E) 13 m

Resolución de problemas

22. Una colina está inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal ($\tan\alpha = 0,4$). Si desde su cumbre se divisa un punto del suelo con una depresión angular θ ($\tan\theta = 2/9$), calcula la altura de la colina si el punto observado se encuentra a 300 m de la base y fuera de la colina.

A) 100 m B) 120 m C) 150 m
D) 180 m E) 240 m

23. Desde un punto en tierra ubicado a 24 m de una torre de 18 m de altura; se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación θ. ¿Cuál es el valor de θ? (Aprox.)

A) 37° B) 53° C) $\frac{53°}{2}$ D) 45° E) 16°

24. Desde un punto en tierra A, ubicado a 5 m de un poste, se divisa su parte alta con un ángulo de elevación β y desde otro punto B, 4 m más cerca del poste que A (al mismo lado que A), el ángulo de elevación es $90° - \beta$. Calcula $\cot\beta$.

A) 5 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

25. Desde lo alto de una torre se divisan dos puntos en tierra A y B con ángulos de depresión α y $90° - \alpha$ respectivamente. Si A equidista de la torre y de B. Calcula $\cot\alpha$.

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. Desde lo alto de una torre de 30 m se divisan dos objetos en tierra a 10 m y 30 m de su base con ciertos ángulos de depresión, a un mismo lado de él. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por las visuales trazadas?

A) 26,5° B) 75° C) 45°
D) 15° E) 37°

27. Desde un helicóptero que se encuentra a $30\sqrt{3}$ m, sobre el nivel del mar; los ángulos de depresión de dos botes que están situados en la dirección sur del observador son de 15° y 75°. Halla la distancia que separa a los dos botes.

A) 100 m B) 140 m C) 180 m
D) 110 m E) 120 m



Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: SISTEMA CARTESIANO

1 Calcula la distancia entre los puntos P(5; 4) y Q(–4; –2).

A) 10 B) 12 C) $\sqrt{13}$ D) $\sqrt{11}$ E) $3\sqrt{13}$

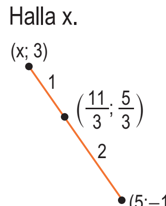
2 Halla las coordenadas del punto medio del segmento MN, si: M(–2; 2) y N(8; –6).

A) (2; 3) B) (3; –2) C) (–3; –2)
D) (4; 1) E) (1; 4)

3 Halla las coordenadas del baricentro G(x; y) del triángulo ABC; si: A(5; 6); B(1; –4) y C(–3; 7).

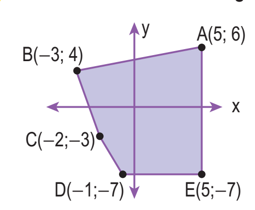
A) (1; 3) B) (3; 2) C) (2; 4)
D) (4; 2) E) (2; 3)

4 Halla x.



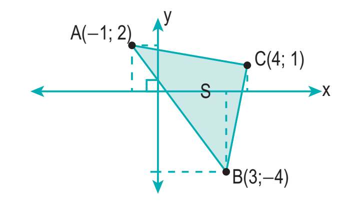
A) 2 B) 3 C) 1 D) 5 E) 4

5 Calcula el área de la región ABCDE.



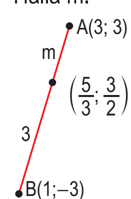
A) 86,5 B) 86,8 C) 80,5 D) 82,6 E) 87,7

6 Calcula el área de la región triangular ABC.



A) 13 B) 11 C) 10 D) 14 E) 9

7 Halla m.



A) 2 B) 3 C) 1 D) 5 E) 4

8 Halla la distancia entre los puntos A(3; 3) y B(1; –3).

A) 2 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{10}$ E) $3\sqrt{10}$

9 Halla el baricentro del triángulo PQR, de vértices: P(1; 1); Q(–4; 6) y R(0; 5).

A) (1; 4) B) (4; 1) C) (–1; 4)
D) (3; 2) E) (2; 3)

10 Halla el área del trapecio ABCD.

y
D(2; 4) C(4; 4)
S
A B(6; 0) x

A) 12 B) 18 C) 14 D) 16 E) 20

11 Halla las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son: (–2; 3) y (6; –3).

A) (2; 3) B) (2; 1) C) (2; 0) D) (0; 2) E) (–4; 3)

12 Determina las coordenadas del baricentro del triángulo que se forma al unir los puntos A(–1; 5); B(3; 9) y C(7; 1).

A) (3; 2) B) (–7; 3) C) (3; 5) D) (5; 3) E) (–3; 5)

13 Si (–1; 2) es el punto medio del segmento formado al unir los puntos, (–3; –1) y (a; b). Determina: a + b.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

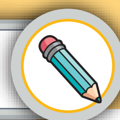
14 En un triángulo ABC se sabe que A(3;5) y el baricentro es G(1;–3). Halla la suma de coordenadas del punto medio de $\overline{BC}$.

A) –3 B) –5 C) –7 D) 5 E) 7

Claves

1. E	3. A	5. A	7. C	9. C	11. C	13. D
2. B	4. B	6. A	8. D	10. D	12. C	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona:

I. Distancia entre los puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$.
II. Punto medio del segmento de extremos $M(x_1; y_1)$ y $N(x_2; y_2)$.
III. Coordenadas del baricentro de un triángulo de vértices $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$.

a) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

b) $G_{(x;\,y)} = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

c) $P_{(x;\,y)} = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

A) Ib – IIa – IIIc B) Ia – IIb – IIIc C) Ib – IIc – IIIa
D) Ic – IIa – IIIb E) Ia – IIc – IIIb

2. Represента en el plano cartesiano lo siguiente:

- El conjunto de puntos P(x; y), tales que: $3 < y < 4 \wedge -1 < x$.

- El conjunto de puntos P(x; y), tales que: $x > y$.

Razonamiento matemático

3. Determina el radio vector de (2; – 3).

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$

4. Determina el radio vector del punto medio del segmento formado al unir los puntos (3; 1) y (7; 9).

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{2}$
D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{15}$

5. Se tiene una circunferencia de centro (– 3; 7) que pasa por (2; –5), determina su diámetro.

A) 13 B) 15 C) 26
D) 30 E) 35

6. Dados tres vértices de un paralelogramo A(3; –5); B(5; –3); C(–1; 3), determina el cuarto vértice D opuesto a B.

A) (4; 2) B) (4; –2) C) (–3; 1)
D) (–3; 3) E) (2; –1)

7. Halla la distancia entre los puntos A(1; 3) y B(–2; –4).

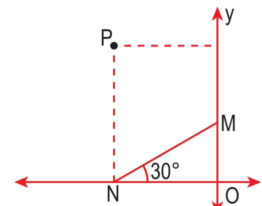
A) $\sqrt{57}$ B) $\sqrt{58}$ C) 48
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{17}$

8. Halla el mayor lado del cuadrilátero ABCD, siendo A(–5; 6), B(–2; 7), C(0; 1) y D(–3; 0).

A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $3\sqrt{10}$
D) $4\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{10}$

Resolución de problemas

9. En la figura mostrada las coordenadas del punto P son $(-6\sqrt{3}; 8)$; halla la distancia del baricentro de la región triangular MON al punto P.



A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{21}$ C) 10
D) 8 E) $2\sqrt{2}$

10. Los vértices de un cuadrado son: A(0, 0); $B(b_1; b_2)$, C(3; 4) y $D(d_1; d_2)$. Calcula el valor de:
$k = d_1 . b_1 + d_2 . b_2$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) –2

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Coloca verdadero (V) o falso (F), según corresponda y marca la alternativa correcta.

I. Para calcular el baricentro de un triángulo es necesario tener un vértice como mínimo.	
II. El radio vector es la distancia de un punto a su ordenada.	
III. En el IC el producto de coordenadas de cualquier punto siempre es positivo (+).	

A) FVF B) FFF C) FFV D) VFF E) VVF

12. Compara las siguientes cantidades:
M: El producto de coordenadas del punto medio del segmento AB que tiene como extremos: A(3; –2) y B(1; 4).
N: El perímetro del triángulo equilátero, que tiene como dos de sus vértices. M(3; 1) y N(–1; 4).

A) 2N = 15M B) 4N = 3M C) 2N = 7M
D) 6M = N E) 15M = N

Razonamiento y demostración

13. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son (–7; 3) y (–1; –5), determina su perímetro.

A) 60 B) 40 C) 20
D) $12\sqrt{3}$ E) $15\sqrt{2}$

14. Al unir los puntos A(–5; 1), B(–1; 7) y C(5; –1). Se forma un triángulo ABC. Determina la longitud de la mediana AM, (M en $\overline{BC}$).

A) $\sqrt{47}$ B) $\sqrt{51}$ C) $\sqrt{53}$
D) $\sqrt{57}$ E) $\sqrt{61}$

15. Del punto A(0; –1) se traza un segmento al punto B(–4; 3). ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se triplique su longitud?

A) (–10; 12) B) (–12; 11) C) (12; –10)
D) (10; –12) E) (–12; –9)

16. Halla en el eje de abscisas un punto M cuya distancia hasta el punto N(2; –3) sea igual a 5. Indica una solución.

A) (–3; 0) B) (–1; 0) C) (5; 0)
D) (6; 0) E) (3; 0)

17. Si A(0; 0); B(2; 5) y C(4; –2) son vértices de un triángulo, halla la distancia del baricentro al punto medio de $\overline{AC}$.

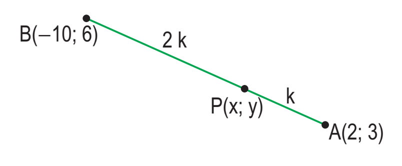
A) $\sqrt{13}$ B) 1/2 C) 2
D) 3 E) $\sqrt{5}$

18. Los extremos del diámetro de una circunferencia son A (–1 + a; 1 – b) y B(3 – a; 5 + b). Halla las coordenadas del centro de dicha circunferencia.

A) (3; 1) B) (1; 1) C) (2; 3)
D) (3; 2) E) (1; 3)

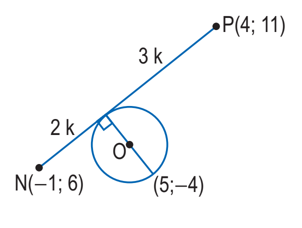
Resolución de problemas

19. En el gráfico, halla x + y



A) 0 B) –1 C) 2
D) 3 E) –2

20. Halla el centro O de la circunferencia.



A) (3; 5) B) (0; 6) C) (1; 1)
D) (3; 2) E) (2; 3)

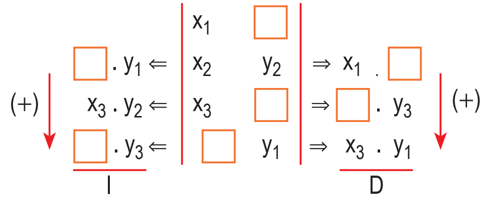
NIVEL 3

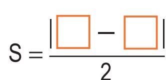
Comunicación matemática

21. A continuación coloca lo necesario en los recuadros para que la fórmula sea válida.

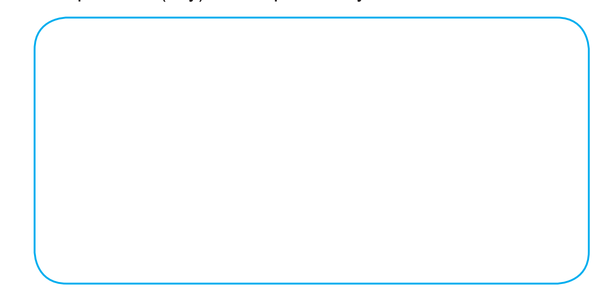
Área de un triángulo
Sea el triángulo de vértices
$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$:

Halla el área del triángulo:





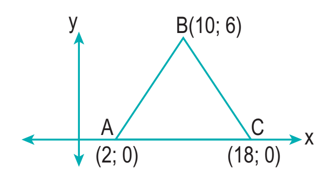
22. Representa en el plano cartesiano lo siguiente:
- Los puntos P(x; y), tales que: x + y = 2



- Los puntos Q(x; y) , tales que: $x^2 + y^2 = 4$

Razonamiento y demostración

23. En la figura, calcula el perímetro de la región triangular ABC. Si:

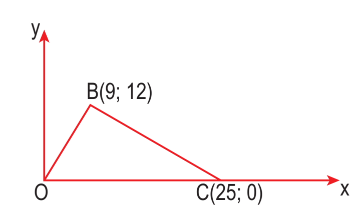


A) 26 B) 36 C) 34
D) 42 E) 44

24. Los vértices de un triángulo son A(1; 2), B(3; 6); C(– 1; 0). Calcula la longitud de la mediana relativa a $\overline{AB}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

25. Del gráfico se deduce que el triángulo OBC es:



A) Escaleno B) Rectángulo C) Acutángulo
D) Isósceles E) A y B

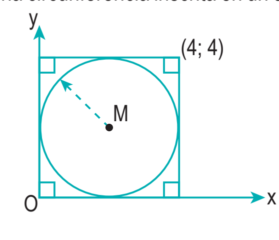
26. Los vértices de un cuadrado son A(0; –3); B(5; b_2), C(3; 4), D(d_1; d_2). Calcula el área del rectángulo cuyos vértices son los puntos B, P, D, Q donde P(d_1; b_2) y Q(5; d_2).

A) 58 B) 29 C) 25
D) 21 E) 19,5

27. En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$), donde A(0; 0) y C(6; 2), calcula el área de la región limitada por el trapecio, siendo la base menor BC paralela al eje de abscisas.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 24 E) 28

28. Se presenta una circunferencia inscrita en un cuadrado. Calcula OM.



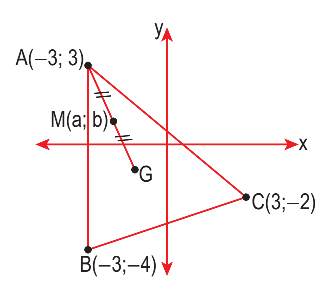
A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{2}$
D) 3 E) $\sqrt{3}/2$

29. Las coordenadas de un vértice de un triángulo es (–3; –7) y del baricentro es (–3; –3). Calcula las coordenadas del pie de la mediana respectiva.

A) (–1; –3) B) (–1; –1) C) (–3; –3)
D) (–3; –1) E) (0; 0)

Resolución de problemas

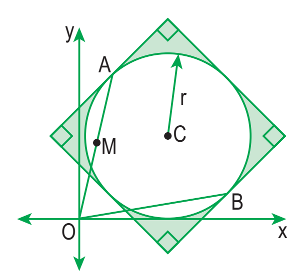
30. Si G es baricentro del triángulo ABC y M es punto medio de $\overline{AG}$.



Halla el valor de: a + b

A) 0 B) 3 C) –1 D) –2 E) 1

31. Del gráfico, halla el área sombreada.



Si: 2OM = OA = OB; $\overline{AB}$ diámetro. M = (1; 2) ∧ B = (4; 2)

A) $8 - 2\pi$ B) $8 - \pi$ C) $4 - \pi$
D) $4 - \pi$ E) $8 + \pi$

Claves

NIVEL 1
1. E
2.
3. C
4. C
5. C
6. C
7. B
8. B
9. B
10. B

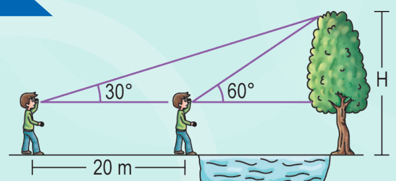
NIVEL 2
11. C
12. A
13. B
14. C
15. B
16. D
17. C
18. E
19. C
20. D

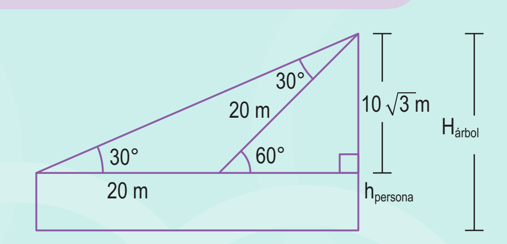
NIVEL 3
21.
22.
23. B
24. D
25. E
26. D
27. A
28. C
29. D
30. C
31. A

MARATÓN Matemática

- Una persona colocada a la orilla del río ve un árbol plantado sobre la ribera opuesta bajo un ángulo de elevación de 60°, se aleja 20 m y el nuevo ángulo de elevación mide 30°. Halla la altura del árbol. ($h_{persona} = \sqrt{3}$ m)







$H_{árbol} = h_{persona} + 10\sqrt{3}$ m

$H_{árbol} = \sqrt{3}$ m $+ 10\sqrt{3}$ m $= 11\sqrt{3}$ m

$\therefore H_{árbol} = 11\sqrt{3}$ m

1. Simplifica la siguiente expresión:

$$B = -1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 - \operatorname{sen}x)(1 + \operatorname{sen}x)}}}$$

A) $\cot^2 x$ B) $\operatorname{sen}^2 x$ C) 1
D) $\cos^2 x$ E) $\tan^2 x$

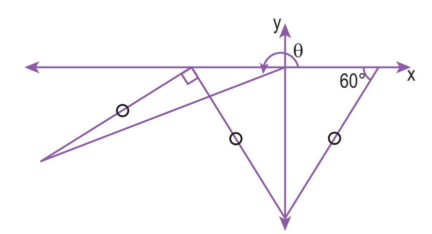
2. Un alumno del colegio, observa los ojos de una chica con un ángulo de elevación "θ". Después de acercarse una distancia igual al doble de la diferencia de sus estaturas, el ángulo de elevación es de 90°. Calcula:
$M = (\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 1 E) $\frac{2}{3}$

3. Calcula el valor de:
$R = \cos(\tan(\operatorname{sen}\pi)) + \tan\left(\cos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\right)$

A) tan1° + 1 B) tan1° C) 1
D) 1 – tan1° E) 2tan1°

4. Del siguiente gráfico, halla el valor de:
$P = \cot^2\theta - 1$



A) $4 + 2\sqrt{3}$ B) $3 + 2\sqrt{3}$ C) $3 - 2\sqrt{3}$
D) $1 + 2\sqrt{3}$ E) $4 - 2\sqrt{3}$

5. Si: $2^{2\cot x - 2} = (\sqrt{2})^{\cot x}$ y $x \in$ IC
Halla el valor de: $A = 2\operatorname{sen}x + \cos x$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) 1 E) 2

6. En la siguiente CT determina el área de la región sombreada en términos de β.
Si OE = EF

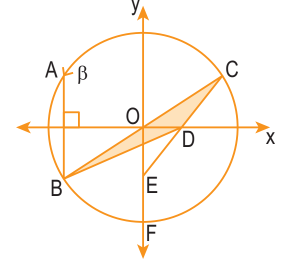
A) $\frac{\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\beta}{2}$

B) $\frac{-\operatorname{sen}\beta \times \cos\beta}{2}$

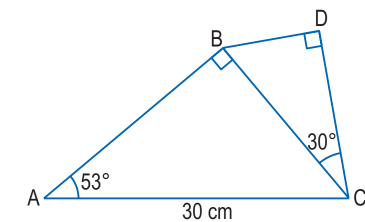
C) $\frac{2}{3}\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

D) $\frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

E) $-\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

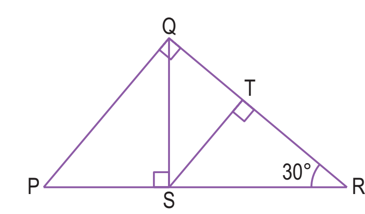


7. Halla el área del triángulo BDC.



A) $18\sqrt{3}$ cm^2
B) $30\sqrt{3}$ cm^2
C) $45\sqrt{3}$ cm^2
D) $72\sqrt{3}$ cm^2
E) $36\sqrt{3}$ cm^2

8. Calcula ST, si PR = 48 cm.



A) 20 cm
B) 18 cm
C) 32 cm
D) 24 cm
E) 16 cm

9. Un avión que está por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje, cuya extensión es H, siendo H la altura a la que se encuentra. Si ve el extremo más alejado con un ángulo de depresión de 53°/2, calcula con qué ángulo observa el otro extremo.

A) 53° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 30°


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 3
Trigonometría
Trigonometría

RECUERDA

René Descartes [1596-1650]

Filósofo y matemático francés nacido en Haye y fallecido en Estocolmo. Descartes usó su nombre latinizado: Renatus Cartesius. Esta es la causa de que su sistema más emblemático se llame cartesiano y que es el sistema más corriente sobre el que se trazan curvas que representan ecuaciones (inventado por él), también hoy conocido como plano cartesiano.

Descartes contribuyó principalmente a la ciencia con sus matemáticas. Se interesó especialmente en esta materia cuando estuvo en el ejército, ya que la inactividad de que gozó le dejaba mucho tiempo para pensar.

Posteriormente sus investigaciones se dirigieron a la consecución de una regla para la construcción de las raíces de cualquier ecuación cúbica o cuártica por medio de una parábola.

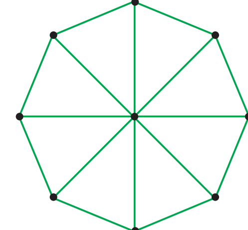
No está claro si ya había descubierto su geometría analítica para el año 1628, pero hay evidencia que demuestran que la invención de la geometría cartesiana no puede ser posterior a esta fecha. Su obra matemática fundamental es La *Géometrie* cuyo estudio permitió conocer la geometría analítica a sus contemporáneos.

Reflexióna

- *Cuando las expectativas no son claras y compartidas, la gente empieza a verse envuelta emocionalmente, y las incomprensiones se multiplican originando colisiones y fracturas en la comunicación.*
- *La veracidad consiste en decir la verdad; en otros términos, en adecuar nuestras palabras a la realidad. La integridad consiste en adecuar la realidad a nuestras palabras; en otros términos, mantener las promesas y satisfacer las expectativas.*
- *Poseer la confianza de alguien es más que poseer su amor.*

¡Razona...!

Si dos puntos determinan un segmento simple, ¿cuántos segmentos simples como mínimo se deberán retirar, para que no quede ningún triángulo?



A) 7 B) 1 C) 3 D) 4 E) 8

Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN CUALQUIER MAGNITUD

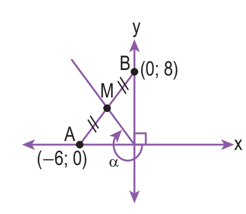
1 Un punto del lado final de un ángulo α, en posición normal, es (–5; 12).

Calcula: $M = \dfrac{\sec\alpha + \tan\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$

A) 13/7 B) –25/7 C) 25/7
D) –65/7 E) 65/7

2 Del siguiente gráfico, halla el valor de:

$K = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\tan\alpha}$



A) –3/20 B) 4/15 C) 3/20
D) –4/15 E) 3/10

3 Si: $\theta = 1° + 2° + 3° + ... + n°$, $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$
Halla el signo de senθ y tanθ; si n = 26°

A) (+) (+) B) (+)(–) C) (–) (–)
D) (–)(+) E) no se puede precisar

4 Dos ángulos coterminales están en relación de 1 a 7. Halla la suma de los ángulos, si el mayor de ellos se encuentra en el intervalo $\langle 900°; 1300° \rangle$.

A) 1440° B) 1260° C) 840°
D) 960° E) 1640°

5 Si: $\cot\beta = \dfrac{1}{2}$; $\beta \in$ IIIC

Halla el valor de:

$R = \dfrac{1 + \cos\beta}{1 - \cos\beta}$

A) $(\sqrt{5} + 3)/2$ B) $(6 + \sqrt{5})/4$
C) $(3 - \sqrt{5})/2$ D) $(6 - \sqrt{5})/4$
E) 1/2

6 Dado el gráfico, halla:
$K = \cot\alpha - \tan\alpha$

A) 2/3 B) 5/6 C) –2/3
D) –5/6 E) 3/2

7 Si: $\theta \in]80°; 100°]$
Da el signo de:

$P = \tan\frac{\theta}{2} . \cos\frac{\theta}{4}$

$J = \sec\frac{3\theta}{2} - \csc\theta$

A) (+); (+) B) (+); (–) C) (–); (–)
D) (–); (+) E) No se puede precisar

8 Si: $\tan\alpha = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in IIIC$
Halla: $P = 3\sec\alpha - \csc\alpha$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

9 Halla α y θ si son cuadrantales y positivos y menores que una vuelta.

$\sqrt{\cos\alpha + 1} + \sqrt{-1 - \cos\alpha} = 1 - \text{sen}\theta$

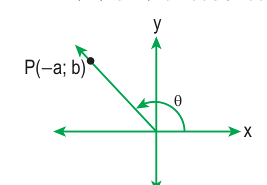
A) 180° y 270° B) 180° y 90° C) 90° y 270°
D) 270° y 0° E) 90° y 0°

10 Si: $1 - \cos^2\theta = 1/4 \wedge \theta \in \langle 180°; 270° \rangle$
Calcula el valor de: $A = \sec^2\theta + 1$

A) 3/4 B) $-\sqrt{3/4}$ C) –3/4
D) –7/3 E) 7/3

11 Dado el gráfico, halla:

$A = \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta . \cot\theta . b}$



A) 1 B) a C) –a
D) b E) –b

12 Calcula:

$M = \frac{\text{sen}720° + \cos2160°}{\text{sen}1530° - \tan1440°}$

A) 2 B) –3 C) 4
D) 1 E) –2

13 Determina el signo de las expresiones; si $\alpha \in IIC$ y $\beta \in IIIC$.

$M = \frac{\text{sen}\alpha \cos\beta \tan\alpha}{\csc\alpha + \cot\beta}$

$N = \frac{\tan\beta - \text{sen}\beta}{\csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

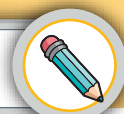
A) (+) ; (–) B) (–) ; (+) C) (+) ; (+)
D) (–) ; (–) E) No se puede precisar

14 Si: $\tan^2\theta = \frac{1}{4} \wedge \theta \in]270°; 360°[$
Calcula: $R = 2\sec\theta + \csc\theta$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) 0 E) $-\sqrt{5}$

Claves

1. D	3. C	5. C	7. B	9. B	11. B	13. C
2. A	4. A	6. B	8. A	10. E	12. D	14. D



Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. En el siguiente cuadro completa según corresponda:

RT / m∠	sen + cos	sen – cos	sec + 1	csc – 1	cos + sec
0°					
90°					
180°					
270°					

2. Completa (+) positivo o (–) negativo según corresponda el signo de cada expresión.

- Si $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow$ $\text{sen}\theta + \cos\theta$ ( )
- Si $\theta \in$ IVC $\Rightarrow$ $\cos\theta - \tan\theta$ ( )
- Si $\theta \in$ IIC $\Rightarrow$ $\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta$ ( )
- Si $\theta \in$ IC $\Rightarrow$ $(\text{sen}\theta - 1)(\text{sen}\theta + 1)$ ( )

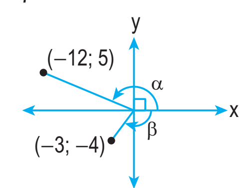
Razonamiento y demostración

3. Si el punto P(8; –15) pertenece al lado final del ángulo canónico β, calcula:

$L = 2\text{sen}\beta - \frac{1}{2}\cos\beta$

A) 1 B) – 1 C) 2 D) – 2 E) – 4

4. Calcula: $\csc\alpha + \cos\beta$



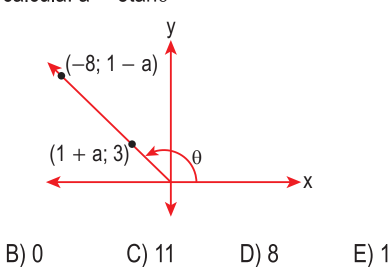
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. En qué cuadrante se encuentra θ si:

$\text{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) Faltan datos

6. De la figura, calcula: $a - 8\tan\theta$



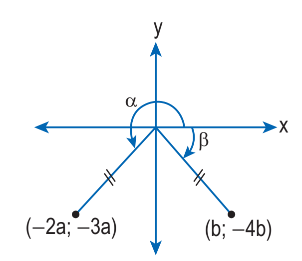
A) –1 B) 0 C) 11 D) 8 E) 1

7. Si: $3\tan\theta + 2 = \cos 90°$; $\theta \in$ IIC.

Calcula: $E = \text{sen}\theta + \cos\theta$

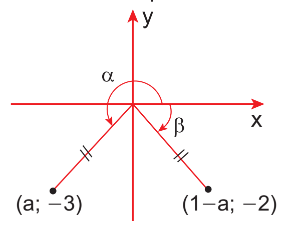
A) $\sqrt{13}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ C) $-\sqrt{13}$
D) $-\frac{\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

8. De la figura, calcula: $\tan\alpha\cot\beta$



A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{8}{3}$ D) $-\frac{3}{8}$ E) – 3

9. Del gráfico calcula: $2\tan\alpha + 3\tan\beta$



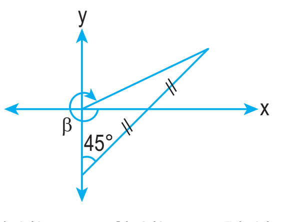
A) 1 B) –1 C) 5 D) –5 E) 0

Resolución de problemas

10. Se tiene un cuadrado ABCD tal que $A \in \overleftrightarrow{x}$; $B \in \overleftrightarrow{y}$; C y D $\in$ IIC. Además la medida del ángulo BAO es 37°. Halla la tangente del ángulo en posición normal que tiene un punto del lado final en el segmento que une el punto D y el origen de coordenadas.

A) –4/7 B) –3/4 C) –4/3 D) –5/7 E) –4/5

11. En el gráfico halla el valor de: $R = \tan\beta + \cot\beta$



A)1 B) 3/2 C) 2/3 D) 2/5 E) 5/2

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Relaciona mediante líneas los ángulos que son coterminales respectivamente:

135° ◎	◎ 878°
310° ◎	◎ 274°
158° ◎	◎ 2655°
1496° ◎	◎ 1390°
2074° ◎	◎ 56°

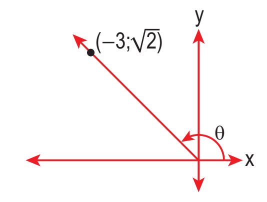
13. Coloca (V) verdadero o (F) falso según corresponda. Luego marca la alternativa correcta.

I. $\text{sen}1134° \cdot \cos148° < 0$ ( )
II. $\tan576° \cdot \sec220° > 0$ ( )
III. $2\text{sen}90° + 2\sec180° = 0$ ( )
IV. $3\text{sen}270° + 4\sec360° < 0$ ( )

A) FVFV B) VFFF C) VFVV
D) VFVF E) FFVF

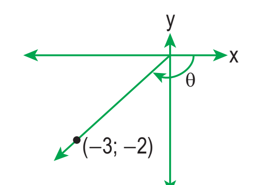
Razonamiento y demostración

14. De acuerdo al gráfico, calcula $\cos\theta$.



A) $\sqrt{\frac{2}{11}}$ B) $-\sqrt{\frac{2}{11}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{11}}$
D) $-\frac{3}{\sqrt{11}}$ E) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$

15. De acuerdo al gráfico, calcula $\text{sen}\theta$.



A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$
D) $-\frac{2}{\sqrt{13}}$ E) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$

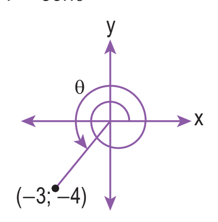
16. Si: $8^{\tan\theta+1} = 4$
Además: $\cos\theta > 0$, calcula: $\text{sen}\theta$

A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ C) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$
D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

17. Si: $\text{sen}\alpha > 0$; $\cos\alpha < 0$, determina el signo de la expresión:
$P = (\tan\alpha + \cot\alpha)\,\text{sen}\alpha$

A) + B) – C) + o – D) + y – E) FD

18. Del gráfico, calcula: $1 - \text{sen}\theta$

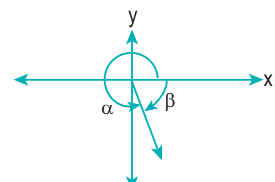


A) 0,2 B) 0,8 C) 1,2 D) 1,5 E) 1,8

19. Si: $\csc^2\theta = 4$ y $\theta \in$ IIIC.
Calcula:
$$M = \frac{\csc\theta}{\sec\theta + 2\cot\theta}$$

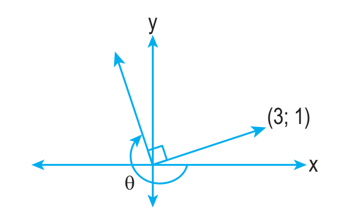
A) –2 B) 2 C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

20. De la figura, calcula $\text{sen}\alpha$, sabiendo que:
$\tan\alpha + \tan\beta = -6$



A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
D) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ E) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

21. Del gráfico, calcula: $\tan\theta$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 3
D) –3 E) $-\frac{3}{5}$

Resolución de problemas

22. Se tiene un cuadrado ABCD, tal que C y D pertenecen al eje y, A y B pertenecen al IIIC. Además el ángulo formado por el eje x y el segmento que une el vértice A y el origen de coordenadas es 37°. Halla la tangente del ángulo en posición normal que tiene un punto de su lado final en el segmento que se origina al unir el origen de coordenadas y el punto medio de BC.

A) 3/4 B) 7/2 C) 4/3 D) 2/7 E) 1/2

23. Dos ángulos coterminales están en relación de 2 a 11. Si el ángulo mayor es dividido por 10 se convierte en el suplemento del ángulo menor dividido entre 5. Halla la suma de ambos.

A) 1560° B) 1440° C) 1320°
D) 1200° E) 1800°

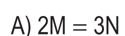
NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Compara las siguientes cantidades:

(M) $\left(2\text{sen}\frac{\pi}{2} - 3\cos\pi\right)^2$

(N) $4\text{sen}^3\frac{3\pi}{2} + 3\sec^2\pi + (2\sec2\pi)^4$



A) 2M = 3N B) 3M = 5N C) 4M = 3N
D) 5M = 3N E) 2M = 5N

25. De las siguientes proposiciones:

I. Si $\theta \in$ IIC $\Rightarrow$ $\text{sen}\theta\tan^3\theta > 0$
II. Si $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow$ $\cos\theta\cot\theta + \text{sen}\theta < 0$
III. Si $\theta \in$ IIC $\Rightarrow$ $\cos(-\theta)\tan(-\theta) > 0$
IV. Si $\theta \in$ IVC $\Rightarrow$ $\text{sen}(-\theta)\sec(-\theta) > 0$
Son falsas:

A) Solo I B) Solo IV C) I y III
D) II y III E) I; II y III

Razonamiento y demostración

26. Si: $4^{\tan^2\theta} = 8$ y $\theta \in$ IIIC; calcula:
$E = \sqrt{3}\,\text{sen}\theta + \sqrt{2}\cos\theta$

A) $\sqrt{5}$ B) $-\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $-2\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{3}$

27. Si: $\tan\theta - 2 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}}$

Calcula: $\sqrt{5}\csc\theta$, sabiendo que $\theta \in$ IIIC.

A) –2 B) –3 C) –6
D) $-\sqrt{3}$ E) $-\sqrt{6}$

28. Si: $\text{sen}\alpha\sqrt{\cos\alpha} < 0$
Determina el signo de la expresión:
$P = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha + \tan\alpha}$

A) + B) – C) + ó – D) + y – E) FD

29. Sabiendo que:
$\sqrt{(\tan\alpha)^{\cos\beta - 1}} = \sqrt[3]{\cot^2\alpha}$ y $\beta \notin$ IIIC.
Calcula: $C = \sqrt{2}\tan\beta + \sec\beta$

A) –7 B) –5 C) –3 D) 5 E) 7

30. Si el punto P(–5; 12) pertenece al lado final del ángulo canónico θ, calcula: $L = 5\text{sen}\theta - \cos\theta$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

31. Si: $2^{\tan\theta + 2} = 3^{\cot\phi + 3}$
Además: $\theta \in$ IIC y $\phi \in$ IVC
Calcula: $\sqrt{2}\cos\theta\cos\phi$

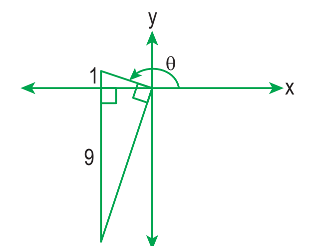
A) $-\frac{1}{5}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) –1

32. De la figura, calcula:
$E = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} + \cos\alpha - \cos\beta$

A) 1 B) 0 C) 2
D) –1 E) 3

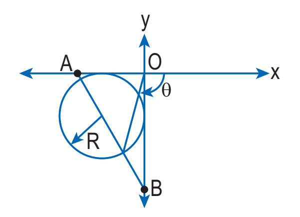
Resolución de problemas

33. De la figura, calcula: $\text{sen}\theta$



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

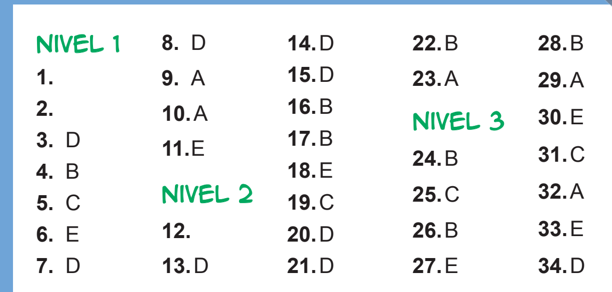
34. En el siguiente gráfico: $m\angle OAB = 60°$



Halla el valor aproximado de: $M = \text{sen}\theta\cos\theta$

A) 1/2 B) 1/3 D) 2/3
D) 1/4 E) 2

Claves



NIVEL 1	8. D	14. D	22. B	28. B
1.	9. A	15. D	23. A	29. A
2.	10. A	16. B	NIVEL 3	30. E
3. D	11. E	17. B	24. B	31. C
4. B	NIVEL 2	18. E	25. C	32. A
5. C	12.	19. C	26. B	33. E
6. E	13. D	20. D	27. E	34. D
7. D		21. D		

Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Calcula:

$$P = \frac{\cos 330° \cot 300° \csc 135°}{\sec 315° \operatorname{sen} 300° \tan 330°}$$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 3 E) $\frac{1}{2}$

2 Si α y θ son complementarios, reduce:

$$M = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 2\theta)\tan(2\alpha + 3\theta)}{\cos(2\alpha + \theta)\tan(4\alpha + 3\theta)}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) senα E) sen2θ

3 Calcula:

$$K = \frac{\operatorname{sen} 390° - \tan 2280°}{\cos 1560°}$$

A) $1 + 2\sqrt{3}$ B) $-1 + 2\sqrt{3}$ C) $1 - 2\sqrt{3}$
D) $-1 - 2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

4 Calcula:

$$P = \operatorname{sen} 1920°[\operatorname{sen}(-60°) - \cos(-45°)]$$

A) $\frac{3 + \sqrt{6}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{-3 - \sqrt{6}}{4}$

5 Simplifica:

$$R = \frac{\operatorname{sen} 140° + \cos 50°}{\cos 130°}$$

A) –2 B) 2 C) 2tan40°
D) –2 tan40° E) 2cot50°

6 Calcula:

$$E = \frac{7\operatorname{sen} 40° + 3\cos 50°}{\operatorname{sen} 140°}$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

7 Calcula el valor de:

$$S = \sqrt{15 + 10\sqrt{2\text{sen}150°}}$$

A) 5 B) 3 C) 2
D) 4 E) 6

8 Halla:

$$A = \sqrt[3]{24 + \sqrt{3}\,(\tan 600°)}$$

A) 5 B) 4 C) 2
D) 3 E) 1

9 Simplifica:

$$\frac{\text{sen}(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(\pi-\alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\csc(\pi-\alpha)}$$

A) $\text{sen}^4\alpha$ B) $-\cos^4\alpha$ C) $\text{sen}^3\alpha$
D) $\cos^3\alpha$ E) $-\text{sen}^4\alpha$

10 Simplifica:

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\text{sen}(-x)} - \frac{\tan(2\pi+x)}{\tan(-x)}$$

A) 1 B) 2 C) –1
D) –2 E) 0

11 Simplifica:

$$P = \frac{\text{sen}(4\pi - x)}{\text{sen}(-x)} + \frac{\cos(-x)}{\cos(5\pi - x)}\ .\ \tan 6\pi$$

A) 1 B) –1 C) 2
D) 0 E) – 2

12 Halla:

$$Q = \frac{\text{sen}(240° - x) + \cos(210° + x)}{\cos(30° + x)}$$

A) 2 B) 1 C) –2
D) –1 E) 3

13 Si $\cos 10° = a$, a que es igual:

$$E = \frac{\text{sen}170°\cos 190°\cos 350°}{\cos 280°\csc 100°\csc 260°}$$

A) a^4 B) a^{-4} C) a^2
D) a^{-2} E) a

14 Calcula el valor de:

$$M = \frac{\text{sen}77\frac{\pi}{3}\tan 56\frac{\pi}{6}\sec 33\frac{\pi}{4}}{\cos 11\frac{\pi}{4}\csc 44\frac{\pi}{3}\cot 77\frac{\pi}{6}}$$

A) 1/2 B) –1/2 C) 3/2
D) –3/2 E) 1

Claves

1. C	3. D	5. A	7. A	9. E	11. D	13. A
2. A	4. E	6. E	8. D	10. E	12. C	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un gran matemático.

a. Ángulos trigonométricos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final.

b. Tipo de ángulo cuya medida es menor a 90° y mayor a 0°.

c. Hipotenusa entre cateto adyacente.

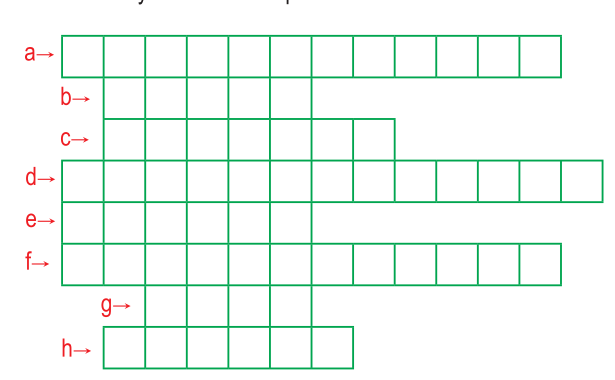
d. Ángulo cuya suma de medidas es 180°.

e. Sistema de medición ángular en que su unidad de medida es el radián.

f. Ángulo en posición normal, cuyo lado final coincide con un semieje del plano cartesiano.

g. Segunda letra del alfabeto griego.

h. Cateto adyacente entre hipotenusa.



2. Relaciona según corresponda:

tan180°	4/3
tan233°	–4/3
tan127°	0

Razonamiento y demostración

3. Calcula:
C = sen150° . cos240°

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. Calcula:
L = tan2310°sen1935°

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
D) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $-\sqrt{6}$

5. Calcula: $C = \frac{\text{sen}2640°}{\cos 3120°}$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. Calcula:
C = sen135°cos217°tan307°

A) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$ B) $-\frac{8\sqrt{2}}{15}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{15}$
D) $-\frac{4\sqrt{2}}{15}$ E) $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$

7. Calcula:
$L = \frac{\tan 150°\text{sen}120°}{\cos 225°}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Calcula:
L = tan(–120°)cos(–300°)

A) $\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) –3

9. Calcula:
C = sen(–45°)tan(–60°)cos(–30°)

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
D) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

10. Calcula:
$L = \frac{\text{sen}112°}{\text{sen}68°} + \frac{\cos 132°}{\cos 48°} + \frac{\tan 310°}{\tan 50°}$

A) 1 B) 3 C) –3
D) –1 E) 0

NIVEL 2

Comunicación matemática

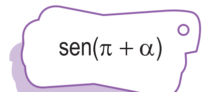
11. Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ ( )

II. $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ ( )

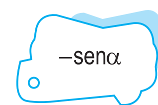
III. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ ( )

12. Relaciona según corresponda:

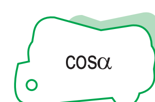




$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$



$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$



Razonamiento y demostración

13. Reduce:

$$L=\frac{\operatorname{sen}140°\cos200°\tan160°}{\operatorname{sen}320°\cos340°\tan200°}$$

A) 1　　B) –1　　C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$　　E) –2

14. Calcula:

$$L=\operatorname{sen}121\frac{\pi}{4}\cos97\frac{\pi}{3}\sec77\frac{\pi}{6}$$

A) $\sqrt{6}$　　B) $-\sqrt{6}$　　C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

15. Reduce:

$J=\operatorname{sen}(x-270°)\sec(x-180°)$

A) 1　　B) –1　　C) tanx

D) –cotx　　E) cosx

16. Reduce:

$$C=\frac{\tan(x-270°)}{\cot(x-180°)}$$

A) 1　　B) – 1　　C) $\tan^2x$

D) $-\tan^2x$　　E) $-\cot^2x$

17. Reduce:

$C=\operatorname{sen}(270°+x)\sec(180°+x)\tan(90°+x)$

A) tanx　　B) –tanx　　C) cotx

D) –cotx　　E) cosx

18. Reduce:

$$J=\frac{\operatorname{sen}(180°+x)\tan(270°-x)}{\cot(360°-x)}$$

A) senx　　B) –tanx　　C) $\tan^2x$

D) $-\tan^2x$　　E) –senx

19. Reduce:

$$C=\frac{\operatorname{sen}(90°+x)}{\cos(180°-x)}+\frac{\operatorname{sen}(360°-x)}{\cos(270°-x)}$$

A) 1　　B) 0　　C) 2

D) –2　　E) –1

20. Reduce:

$$J=\frac{\operatorname{sen}(180°-x)}{\operatorname{sen}(-x)}+\frac{\cos(180°+x)}{\cos(-x)}$$

A) 1　　B) 2　　C) 0

D) –1　　E) –2

NIVEL 3

Comunicación matemática

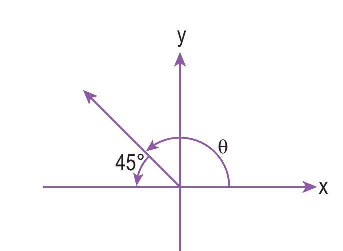
21. Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(-x)=0$ ( )

II. $\cos x-\cos(-x)=0$ ( )

III. $\tan x+\tan(-x)=0$ ( )

22. Observa la gráfica y luego completa.



$\tan\theta$ = ____________

$\operatorname{sen}\theta$ = ____________

$\cot\theta$ = ____________

Razonamiento y demostración

23. Reduce:

$$J = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

A) senx B) – senx C) sen^3x

D) – sen^3x E) sen^2x

24. Reduce:

$$C = \tan(\pi - x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

A) senx B) cosx C) – senx

D) – cosx E) 1

25. Reduce:

$$J = \frac{\operatorname{sen}\left(231\frac{\pi}{2} + x\right).\tan(125\pi + x)}{\cos(132\pi - x)}$$

A) tanx B) – tanx C) cotx

D) – cotx E) – 1

26. Reduce:

$$C = \frac{\tan\left(2001\frac{\pi}{2} - x\right)\sec(2002\pi - x)}{\tan\left(2003\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

A) secx B) – secx C) cscx

D) – cscx E) – cotx

27. En un triángulo ABC, calcula:

$$J = \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\operatorname{sen}C} + \frac{\tan(B + C)}{\tan A} + \frac{\cos(C + A)}{\cos B}$$

A) 1 B) 3 C) –1

D) – 3 E) 0

28. Reduce:

$$C = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} + \frac{\cos(\beta - \theta)}{\cos(\theta - \beta)} + \frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan(\alpha - \theta)}$$

A) 1 B) –1 C) 3

D) – 3 E) 0

29. Si sen20° = n, halla:

C = sen200°tan340°cos160°

A) n^2 B) $-n^2$ C) $\frac{n^2}{1 - n^2}$

D) $\frac{-n^2}{1 - n^2}$ E) $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

30. Si tan10° = n, halla:

L = tan190°sen170°cos350°

A) n^2 B) $n^2 + 1$ C) $\frac{n^2 + 1}{n^2}$

D) $\frac{n^2}{1 + n^2}$ E) $\frac{n^2}{1 - n^2}$

Claves

NIVEL 1	7. E	13. B	20. B	26. B
1.	8. C	14. D	NIVEL 3	27. C
2.	9. C	15. B	21.	28. B
3. D	10. D	16. B	22.	29. B
4. D	NIVEL 2	17. D	23. C	30. D
5. B	11.	18. A	24. D	
6. A	12.	19. B	25. B	



Aplicamos lo aprendido

TEMA 3: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1 Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:
$(\sec x + \tan x - 1)(1 + \sec x - \tan x) = 2\tan x$

2 Si: $\operatorname{sen}\theta + \csc\theta = m$
$\operatorname{sen}\theta - \csc\theta = n$
Halla el valor de: $m^2 - n^2$

A) 1　B) 2　C) 4
D) 0　E) 3

3 Si: $\dfrac{1}{1+\cos\beta} + \dfrac{1}{1-\cos\beta} = \dfrac{25}{8}$
Halla el valor de β.

A) 5/4　B) 4/3　C) 5/3
D) $\sqrt{3}$　E) 2

4 Efectúa:
$M = \dfrac{\operatorname{sen}^3x - \cos^3x}{\cos x - \operatorname{sen}x} + \operatorname{sen}x \,.\, \cos x$

A) 0　B) 1　C) 2
D) –1　E) –1/2

5 Si: $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \dfrac{1}{9}$
Halla el valor de:
$P = \sqrt[3]{\sec^2\theta + \csc^2\theta - 1}$

A) 1　B) 0　C) 3
D) –1　E) 2

6 Si: $\cos\theta = K - \operatorname{sen}\theta$
Halla: $A = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

A) $k^2 - 1$　B) $k^2 + 1$　C) $1 - k^2$
D) $\dfrac{k^2-1}{2}$　E) $\dfrac{1-k^2}{2}$

7 $R = \dfrac{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} + \operatorname{sen}\alpha$

A) $\operatorname{sen}\alpha$ B) $-\operatorname{sen}\alpha$ C) $-\cos\alpha$
D) $\cos\alpha$ E) 0

8 Simplifica:
$P = \dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$

A) secx B) tanx C) cotx
D) 2senx E) 2secx

9 Si:
msecx = cosx
ncscx = senx
Halla: m + n

A) 2 B) 1 C) 4
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

10 Simplifica:
$P = \left(\tan x + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}x}\right)\left(\cot x + \dfrac{\operatorname{sen}x}{1 + \cos x}\right)$

A) secxsenx B) secxtanx C) tanxcosx
D) senxcosx E) secxcscx

11 Si $x = 2\tan\theta$, calcula: $\sqrt{4 + x^2}$

A) $2\sec\theta$ B) $2\cos\theta$ C) $2\tan\theta$
D) $3|\sec\theta|$ E) $2|\sec\theta|$

12 Si:
$\tan\alpha + \cot\alpha = a$
$\tan\alpha - \cot\alpha = b$
Halla: $a^2 - b^2$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

13 Elimina α de la siguiente igualdad:
$\dfrac{m}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{n}{\cos\alpha} = \dfrac{p}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

A) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ B) $\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{p^2}$
C) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{m^2}$ D) $m^2 + n^2 = p^2$
E) $\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{n^2}$

14 Calcula R en la siguiente igualdad:
$\cot^2x - \cos^2x = \cot^2x \cdot R$

A) cosx B) $\cos^2x$ C) senx
D) sen^2x E) 1

Claves

1.	3. A	5. E	7. C	9. B	11. E	13. B
2. C	4. D	6. D	8. E	10. E	12. B	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. A continuación se presenta una lista de identidades trigonométricas.
Clasifícalas según el tipo al que pertenecen en el cuadro inferior.

A. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

B. $\tan x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

C. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

D. $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

E. $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

F. $\cos x \sec x = 1$

G. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}$

H. $\tan x \cot x = 1$

I. $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

J. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x$

Identidades recíprocas	
Identidades por cociente	
Identidades pitagóricas	A –
Identidades auxiliares	

2. De las siguientes igualdades:

I. $\text{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

II. $\cos^2\alpha = (1 + \text{sen}\alpha)(1 - \text{sen}\alpha)$

III. $\tan\alpha = \dfrac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$

IV. $\text{sen}^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

V. $\cot\alpha = \dfrac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$

Son falsas:

A) Solo II B) Solo III C) I y III
D) III y IV E) IV y V

Razonamiento y demostración

3. Reduce:

$$T = \frac{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha + \cos\alpha} + \cos\alpha$$

A) $\text{sen}\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) 0
D) 1 E) 2

4. Reduce:

$$S = \frac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta}$$

A) $\text{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\sec\theta$
D) $\csc\theta$ E) 1

5. Efectúa:

$$V = \frac{1 + \cos\theta}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$$

A) $2\sec\theta$ B) 2 C) $2\tan\theta$
D) $2\cot\theta$ E) $2\csc\theta$

6. Simplifica:

$C = (1 - \text{sen}^2\theta)\tan\theta - \text{sen}\theta\cos\theta$

A) 1 B) 0 C) $\tan\theta$
D) $\cot\theta$ E) $2\text{sen}\theta$

7. Reduce:

$$L = \frac{2\csc\theta + \cos\theta}{2\sec\theta + \text{sen}\theta}$$

A) 1 B) $\tan\theta$ C) $\cot\theta$
D) $2\tan\theta$ E) $2\cot\theta$

8. Señala el equivalente de:

$$I = \frac{\cos^2 x}{\csc^2 x - 1} + \frac{\text{sen}^2 x}{\sec^2 x - 1}$$

A) 1 B) $\text{sen}x\cos x$
C) $\text{sen}^2 x\cos^2 x$ D) $\sec x\csc x$
E) $\sec^2 x\csc^2 x$

9. Reduce: $E = (\tan x + \cot x)\cos x$

A) 1 B) $\text{sen}x$ C) $\cos x$
D) $\sec x$ E) $\csc x$

10. Reducir:

$S = (\sec x + \tan x)(1 - \text{sen}x)$

A) $\cos x$ B) $\text{sen}x$ C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) $\sec x$

Resolución de problemas

11. Si:

$$a = \sqrt{\tan\theta\sqrt{\tan\theta\sqrt{\tan\theta\sqrt{\ldots}}}}$$

Halla el equivalente de:

$$K = \frac{\sec\theta + 3\tan\theta + 2}{\csc\theta + 2\cot\theta + 3}$$

A) 1/a B) $a^2 + 1$
C) $a^2 - 1$ D) a^2
E) a

12. Si:

$(3\text{sen}x + \cos x)^2 + (\text{sen}x + 3\cos x)^2 = a - b\,\text{sen}x\cos x$

Calcula el valor de: $M = \dfrac{a + b}{2}$

A) –2 B) 2 C) –1
D) 1/2 E)

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. En los espacios completa las razones trigonométricas que corresponden para que se cumplan las igualdades.

I. $\tan\alpha = \dfrac{\square}{\csc\alpha}$

II. $\cos\beta = \dfrac{1}{\square}$

III. $\tan^2 x = -(1 + \square)(1 - \square)$

IV. $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\,\square$

V. $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 2(1 + \square)(1 + \square)$

14. De las siguientes identidades trigonométricas:

I. $1 + \tan^2 x = A\sec^2 x$

II. $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = 1 - B\cos^2 x$

III. $(1 - \text{sen}x - D\cos x)^2 = 2(C - \text{sen}x)(1 - \cos x)$

IV. $\text{sen}4x + \cos4x = 1 + E\text{sen}^2 x\cos^2 x$

Halla el valor de: A + B + C + D + E

A) 2 B) 4 C) 7
D) 5 E) 3

Razonamiento y demostración

15. Reduce:

$$A = \sec^2 x + \frac{1 - \tan^2 x}{1 - \cot^2 x}$$

A) 1 B) 0 C) $\text{sen}^2 x$
D) $\cos^2 x$ E) $\tan^2 x$

16. Reduce:

$M = \cot^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha + \tan^2\alpha\cos^2\alpha$

A) 0 B) 1 C) 4
D) 6 E) 3

17. Efectúa: $E = \dfrac{1 - \tan^4 x}{1 - \tan^2 x}$

A) 1 B) 0 C) $\csc^2 x$
D) $\text{sen}^2 x$ E) $\sec^2 x$

18. Efectúa:

$$A = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} - \csc x;\ (x\text{: agudo})$$

A) $\cot x$ B) 0 C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) 2

19. Reduce:

$$T = \frac{(1 - \cos\alpha)(1 + \sec\alpha)}{\tan\alpha}$$

A) $\cos\alpha$ B) $\text{sen}\alpha$ C) $\tan\alpha$
D) $\cot\alpha$ E) $\sec\alpha$

20. Si: $\cos x + \tan x = 1$
Calcula:
$R = \csc x + \cot x + \tan x$

A) 2 B) 3 C) – 2
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

21. Simplifica:
$L = [(1 - \cos^2\theta)\cot\theta + \text{sen}\theta\cos\theta]\cot\theta$

A) 1 B) $\text{sen}^2\theta$ C) $2\text{sen}^2\theta$
D) $\cos 2\theta$ E) $2\cos^2\theta$

22. Si: $\tan\theta - \cot\theta = 3$
Calcula: $C = \tan^2\theta + \cot^2\theta$

A) 6 B) 9 C) 7
D) 8 E) 11

Resolución de problemas

23. Elimina x; y; z de las siguientes expresiones:

$a\,\text{sen}x - b\,\text{sen}z = 0$
$c\cot y - d\,\text{sen}x = 0$
$e\tan y - f\cos z = 0$

A) abd cef
B) $a + c + e = b + d + f$
C) $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + b^2 + f^2$
D) $ace = bdf$
E) $ace = b + d + f$

24. De la siguiente igualdad:
$\text{sen}^6x - \cos^6x$
$= (1 - A\cos^2x)(1 - B\,\text{sen}^2x\cos^2x)$
Halla el valor de: A + B

A) 2 B) 3 C) 0
D) 4 E) 5

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. Completa (V) verdadero o (F) falso, según corresponda.

I. $(\sec\alpha + \tan\alpha)(\sec\alpha - \tan\alpha) = 1$ ( )
II. $2\text{sen}^2\alpha - 1$
$= (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)(\text{sen}\alpha - \cos\alpha)$ ( )
III. $1 - 2\cos^2\alpha = 2\text{sen}^2\alpha - 1$ ( )
IV. $\text{sen}^4x - \cos^4x = 1 - \cos^2x$ ( )

Marca la alternativa correcta:

A) VFVF B) VFVV C) VVVF
D) VVFF E) FVVF

26. A continuación, compara las siguientes expresiones.

(M) El ángulo agudo θ en:
$\text{sen}^3\theta\cos\theta + \text{sen}\theta\cos^3\theta = \tan\theta$

(N) El ángulo agudo θ en:
$$\frac{(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\cos\alpha} = \sqrt{3}$$

A) M > N B) M = N
C) M < N D) M + N = 90
E) M + N = 75°

Razonamiento y demostración

27. Efectúa:
$$H = \frac{\text{sen}^4x - \cos^4x}{\text{sen}^2x - \cos^2x}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) –2 E) 3

28. Reduce:
$$E = \frac{\cos\alpha + \tan\alpha}{\text{sen}\alpha\cos\alpha} - \sec^2\alpha$$

A) $\sec\alpha$ B) $\tan\alpha$ C) $\csc\alpha$
D) 0 E) 1

29. Si: $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$
Calcula: $E = -18\text{sen}\alpha\cos\alpha$

A) 4 B) 3 C) 1
D) 6 E) 5

30. Halla A + B, si:
$(\text{sen}x + \cos x)^2 = A + B\,\text{sen}x\cos x$

A) 4 B) 2 C) 5
D) 6 E) 3

31. Si: $\sec\theta + \tan\theta = 4$
Calcula:
$M = 15\cot\theta + 17\cos\theta$

A) 24 B) 26 C) 16
D) 14 E) 18

32. Elimina θ si $\text{sen}\theta = a$ y $\cos\theta = b$.

A) $a = b$ B) $ab = 1$
C) $a^2 + b^2 = 1$ D) $a^2 + b^2 = 2$
E) $a^2b^2 = 2$

33. Si $\tan\theta + \cot\theta = \sqrt{7}$, calcula:
$L = \sec^2\theta + \cot^2\theta$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

34. Halla C en la igualdad:
$$\frac{1}{\cos^2x} + \frac{1}{\tan^2x} = \frac{1}{C} + \frac{1}{\cot^2x}$$

A) $\csc^2x$ B) sen^2x C) $\sec^2x$
D) 1 E) $\cos^2x$

Resolución de problemas

35. Si:
$$\left(\frac{1 - \text{sen}x\cos x}{1 - \cot x}\right)\left(\frac{\text{sen}^4x - \cos^4x}{\text{sen}^3x + \cos^3x}\right) = A\text{sen}x$$
$$\left(\frac{1 + \text{sen}x + \cos x}{\sqrt{B}}\right)^2 = (1+\text{sen}x)(1+\cos x)$$

Halla A y B para que ambas expresiones sean una identidad.

A) –1 y 2 B) 2 y 1 C) 0 y 1
D) 1 y 2 E) 1 y 1

36. Si:
$$2 = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \ldots}}}$$

Halla el valor de:
$$E = \frac{\sec x\csc x - \cot x}{\text{sen}x}$$

A) $\sqrt{5}$ B) 3/2 C) 2
D) 4 E) $\sqrt{3}$



Claves

NIVEL 1	8. A	15. A	23. D	30. E
1.	9. E	16. B	**NIVEL 3**	31. C
2. D	10. A	17. E	24. B	32. C
3. A	11. E	18. D	25. C	33. C
4. A	12. C	19. B	26. C	34. B
5. E	**NIVEL 2**	20. E	27. B	35. D
6. B	13.	21. E	28. C	36. A
7. C	14. E	22. E	29. E	

MARATÓN Matemática

- Se tienen las siguientes igualdades:

$$M = \frac{1}{\sec\theta + \csc\theta - \sec\theta \,.\, \csc\theta}$$

$$N = \frac{1}{\sec\theta + \csc\theta + \sec\theta \,.\, \csc\theta}$$

Además se cumple: $M + N = a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta$

Halla el valor de: $2a - b$

Resolución

De la suma:

$$M+N = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\text{sen}\theta} - \frac{1}{\cos\theta \,.\, \text{sen}\theta}} + \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta}}$$

$$M + N = \frac{\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta}{\text{sen}\theta + \cos\theta - 1} + \frac{\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta}{\text{sen}\theta + \cos\theta + 1}$$

$$a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = \frac{\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta\,(\text{sen}\theta + \cos\theta + 1 + \text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 1^2}$$

$$a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = \frac{\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta \,.\, 2(\text{sen}\theta + \cos\theta)}{(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta - 1)}$$

$$a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = \frac{2 \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \cos\theta\,(\text{sen}\theta + \cos\theta)}{1 + 2\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta - 1}$$

$$a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = \frac{2 \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \cos\theta\,(\text{sen}\theta + \cos\theta)}{2\,\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta}$$

Luego tenemos:

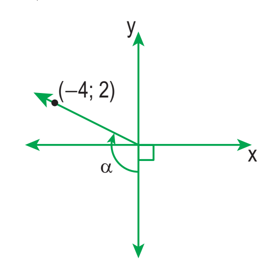
$a\,\text{sen}\theta - b\cos\theta = (1)\text{sen}\theta - (-1)\cos\theta$

$\Rightarrow\ a = 1 \ \wedge\ b = -1$

$\therefore\ 2a - b = 2(1) - (-1)$

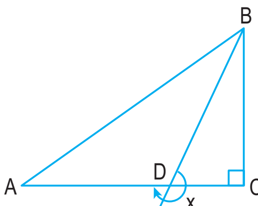
$2a - b = 2 + 1$

1. Del siguiente gráfico, calcula: $k = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$



A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 4
D) 2 E) $\frac{1}{4}$

2. Del siguiente gráfico, $m\angle BAC = 53°$ y $AD = 2DC$.
Halla el valor de tanx.



A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 2
D) 4 E) $\frac{1}{2}$

3. Simplifica la siguiente expresión:

$$A = \frac{\cos^4 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\text{sen}^4 x}{1 + \cot^2 x} + 3\text{sen}^2 x\cos^2 x$$

A) 2 B) $\text{sen}^2 x$ C) $\cos^2 x$
D) $\text{sen}^2 x\cos^2 x$ E) 1

4. Halla la medida del mayor de dos ángulos coterminales sabiendo que el mayor es al menor como 5 es a 2 y que la suma es mayor que 1050°; pero menor que 1800°.

A) 1200° B) 3600° C) 7240° D) 1500° E) 1300°

5. Resuelve la siguiente expresión:

$P = (1 + 2\tan^2\alpha)(1 + 2\sec^2\alpha\tan^2\alpha) + \tan^8\alpha$

A) $\tan^8\alpha$ B) 1 C) $\tan^8\alpha - \sec^8\alpha$
D) $\sec^8\alpha$ E) $\sec^8\alpha - \tan^8\alpha$

6. Si: $2\text{sen}^2 x = 4\cos^2 x - 5\text{sen}x$
Halla el valor de: senx

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{-1}{2}$
D) $\frac{-3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

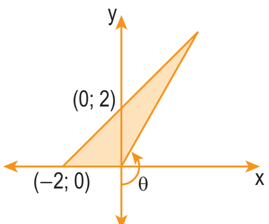
7. Indica el equivalente de:

$$R = \left(\frac{\cos x}{1 - \text{sen}x} - \frac{1}{\cot x}\right)\left(\frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\tan x}\right)$$

Si $x \in [0; \pi/2\rangle$

A) secx B) cscx C) tanxsecx
D) secxcscx E) cotxcscx

8. Del gráfico, calcula al valor de tanθ; si el área del triángulo sombreado es 4 u^2.



A) $\frac{-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

9. Simplifica:
M = cosb + tanbsenb + tanb – secb

A) senb B) cosb C) secb
D) cscb E) tanb


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 4
Trigonometría
Trigonometría

RECUERDA

Jhon Napier (1550 - 1617)

Matemático y teólogo escocés, el nombre de Napier ha quedado por siempre ligado al desarrollo de los logaritmos, un método matemático ideado con el objeto de simplificar el cálculo numérico que iba a ejercer una enorme influencia en todos los campos de la matemática aplicada. Napier tardó algo más de veinte años en madurar sus ideas iniciales que publicó finalmente en 1614. Poco después, el matemático inglés Henry Briggs se desplazó a Escocia y convenció a Napier para modificar la escala inicial usada por este. Nacieron así los logaritmos de base 10, forma en la que se impusieron en toda Europa.

Proponiéndose especialmente facilitar las operaciones matemáticas, John Napier inventó los logaritmos (encaminados sobre todo a aliviar el difícil trabajo de los cálculos astronómicos). Su mayor fama la debe a su obra matemática que dio a conocer en 1614 con el tratado Mirifici logarithmorum canonis descriptio, fruto de un estudio de veinte años. La obra aportó una contribución notabilísima a la simplificación de todos los cálculos.

Se recuerda también a Napier en la historia de la trigonometría por haber encontrado importantes relaciones entre los elementos de los triángulos planos (teorema de Napier) y entre los de los triángulos esféricos (analogías de Napier).

Reflexiona

- *Existe una enorme diferencia en la manera de pensar de la persona que logra cosechar grandes éxitos y aquella que se limita a subsistir y a responder a sus necesidades inmediatas.*
- *En primer lugar, fijarse metas nos devuelve la capacidad de centrarnos en nuestras vidas, unas vidas que se han vuelto demasiado complicadas debido al exceso de opciones.*
- *En esta época, hay demasiadas cosas para hacer en cualquier momento. Hay un exceso de distracciones que compiten por nuestra atención. Las metas aclaran nuestros deseos y nos ayudan a centrarnos solo en aquellas actividades que nos guiarán allí donde queremos.*

¡Razona...!

Completa el siguiente tablero de 7×7 con números de tal forma que la suma de los números escritos en tres casillas consecutivas (en la misma fila o en la misma columna) sea siempre 20.

Calcula el valor de x.

					6	
			4			
5						
				x		

A) 4 B) 5 C) 6

D) 9 E) 11

Aplicamos lo aprendido





TEMA 1: ÁNGULOS COMPUESTOS

1 Calcula:
$M = \operatorname{sen}27°\cos10° + \cos27°\operatorname{sen}10°$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) 1

2 Calcula:
$R = \dfrac{\tan 20° + \tan 17°}{1 - \tan 20° \tan 17°}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

3 Efectúa:
$M = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \, . \cos y} - \tan y$

A) tanx B) cosy C) cotx
D) senx E) seny

4 Simplifica:
$A = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

A) $\sqrt{2}$ B) tanx C) 1
D) tan(x + y) E) tany

5 Efectúa:
$A = \sqrt{2}\cos(\alpha + 45°) + \operatorname{sen}\alpha$

A) 2 B) $\operatorname{sen}\alpha$ C) –2
D) 0 E) $\cos\alpha$

6 Si: $\tan\alpha = 1$ y $\tan\theta = \frac{3}{4}$

Calcula: $S = 28\tan(\alpha - \theta)$

A) 4 B) 2 C) 5
D) 9 E) 10

7 Si: $x - y = 60°$

Calcula: $M = (\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$

A) 2 B) 8 C) 3
D) 0 E) 5

8 Efectúa:

$R = \operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}^2 y$

A) $\operatorname{sen}^2 x$ B) 0 C) 1
D) $\cos^2 y$ E) $\operatorname{sen}^2 y$

9 Reduce:

$N = \dfrac{2\cos(\theta - 30°) - \sqrt{3}\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

A) -1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 0

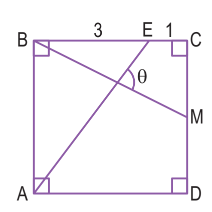
10 Si: $A + B + C = \pi$

Además: $\tan B + \tan C = 2\tan A$

Calcula: $\cot B \cdot \cot C$

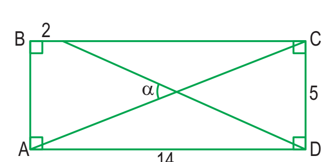
A) $\frac{3}{5}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

11 Calcula $\tan\theta$, si ABCD es un cuadrado y M es punto de $\overline{CD}$.



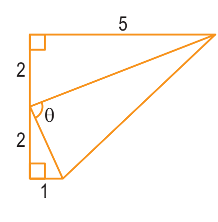
A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) 0,75 E) $\frac{13}{2}$

12 De la figura, halla $\sqrt{221}\operatorname{sen}\alpha$.



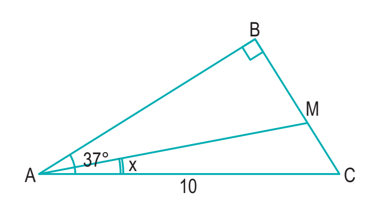
A) 5 B) 8 C) 12 D) 10 E) 13

13 Calcula $\tan\theta$.



A) 12 B) 6 C) 8 D) 10 E) 1

14 Calcula $\tan x$, si BM = 2MC.



A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{9}{11}$

Claves

1. D	3. A	5. E	7. C	9. C	11. C	13. A
2. E	4. E	6. A	8. A	10. D	12. D	14. B

Practiquemos

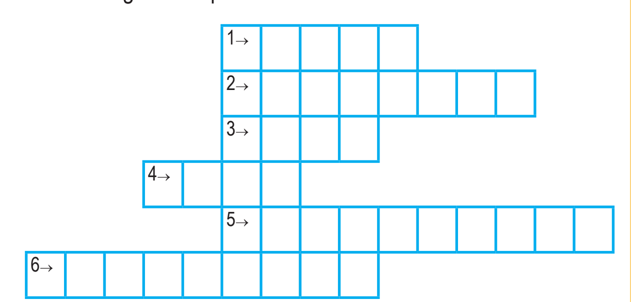


NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama
Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Tipo de ángulo cuya medida es menor que 90°.
2. Cateto opuesto entre cateto adyacente.
3. Primera letra del alfabeto griego.
4. Cateto opuesto entre hipotenusa.
5. Lado mayor de un triángulo rectángulo.
6. Tipo de ángulo formado por la suma o diferencia de dos o más ángulos simples.



2. Completa:

$\text{sen}(\alpha + \beta) =$

$\text{sen}(\alpha - \beta) =$

Razonamiento y demostración

3. Efectúa:
T = sen8° . cos22° + cos8° . sen22°

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

4. Calcula:
I = sen4° . cos2° − cos4° . sen2°

A) sen6° B) 1 C)sen2°
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

5. Calcula:
M = cos40° . cos13° − sen40° . sen13°

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{3}{5}$

6. Efectúa:
R = cos80° . cos50° + sen80° . sen50°

A) cos130° B) sen130° C) sen10°
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

7. Halla:

$$A = \frac{\tan 70° - \tan 10°}{1 + \tan 70° . \tan 10°}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Reduce:

$$A = \frac{\text{sen}(x+y)}{\cos x . \cos y} - \tan y + \text{secxsenx}$$

A) 0 B) tany C) tanx
D) 2tanx E) –2tany

9. Si: $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$
Hallar: $\tan(\alpha + \theta)$

A) $\frac{37}{33}$ B) $\frac{59}{31}$ C) $\frac{56}{33}$
D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{8}{31}$

10. Si: $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ y $\tan\beta = \frac{1}{4}$
Hallar: $\tan(\alpha - \beta)$

A) $\frac{17}{19}$ B) $\frac{11}{19}$ C) $\frac{13}{19}$
D) $\frac{13}{19}$ E) $\frac{8}{19}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}(\alpha + 10°) = \text{senxsen}10° + \text{cosxcos}10°$ ( )
II. $\text{sen}(x - 15°) = \text{senxcos}15° + \text{cosxsen}15°$ ( )
III. $\text{sen}(x + 20°) = \text{senxsen}70° + \cos 70° \cos x$ ( )

12. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}(\alpha - 2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}2\beta$ ( )
II. $\text{sen}(x + 2x) = \text{senxcos}2x + 2\text{senxcos}^2 x$ ( )
III. $\text{sen}(x + 30°) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\text{senx} + \cos x)$ ( )



Razonamiento y demostración

13. Efectúa:
M = [sen(x + y) − cosxseny] . secy

A) cosx B) senx C) tanx
D) cotx E) secx

14. Efectúa:
$A = [\cos(x + y) + \text{sen}x\text{sen}y] \,.\, \sec x$

A) seny B) secx C) secy D) tanx E) cosy

15. Efectúa:
$S = \dfrac{\tan 2x + \tan 3x}{1 - \tan 2x \,.\, \tan 3x}$

A) tanx B) tan6x C) tan5x D) 1 E) tan3x

16. Reduce: $T = 2\text{sen}(x + 30°) - \sqrt{3}\,\text{sen}x$

A) cosx B) 0 C) 1
D) –senx E) senx

17. Halla x, si es agudo.
$\text{sen}x\cos 21° + \cos x\text{sen}21° = \text{sen}34°$

A) 13° B) 12° C) 18° D) 27° E) 39°

18. Halla θ, si es agudo.
$\text{sen}\theta\cos 9° - \cos\theta\text{sen}9° = \text{sen}27°$

A) 14° B) 18° C) 36° D) 21° E) 30°

19. Halla θ, si es agudo.
$\cos 26°\cos\theta + \text{sen}26°\text{sen}\theta = \cos 19°$

A) 9° B) 10° C) 8° D) 7° E) 6°

20. Halla x, si es agudo.
$\cos 34°\cos x - \text{sen}34°\text{sen}x = \cos 58°$

A) 32° B) 31° C) 29° D) 26° E) 24°

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\tan(x + 2°) = \dfrac{\tan x + \tan 2°}{1 - \tan x \,.\, \tan 2°}$ ( )

II. $\tan(x - 5°) = \dfrac{\tan x + \tan 5°}{1 - \tan x \,.\, \tan 5°}$ ( )

III. $\tan(x + 40°) = \dfrac{\tan x + \cot 50°}{1 - \tan x \cot 50°}$ ( )

22. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\tan(2x - x) = \dfrac{\tan(2x) + \tan(x)}{1 - \tan 2x \,.\, \tan x}$ ( )

II. $\tan(x + 2x) = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}$ ( )

III. $\tan(x + 30°) = \dfrac{\tan x + \cot 60°}{1 - \tan x \,.\, \cot 60°}$ ( )

Razonamiento y demostración

23. Efectúa:
$Z = \dfrac{\cos(a + b)}{\text{sen}a \cos b} + \tan b$

A) cota B) tana C) 2tanb
D) 2tana E) –2

24. Efectúa:
$N = \dfrac{\cos(\alpha - \theta)}{\text{sen}\alpha \,.\, \cos\theta} - \tan\theta$

A) 0 B) –1 C) $\tan\alpha$
D) $\cot\alpha$ E) 1

25. Efectúa:
$A = [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \,.\, \dfrac{\tan y}{2}$

A) senxcosy B) senx C) senycosx
D) cosy E) 1

26. Halla n si: $\text{sen}(45° + \alpha) = n(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

27. Calcula A, si:
$\text{sen}(60° - \theta) = A(\sqrt{3}\cos\theta - \text{sen}\theta)$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

28. Reduce: $T = \text{sen}(A + B)\text{sen}(A - B) + \text{sen}^2 B$

A) senA B) $\text{sen}^2 A$ C) 0
D) –senA E) tanA

29. Reduce:
$M = \text{sen}(A + B)\text{sen}(A - B) - \text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B$

A) tanA B) tanB C) 0 D) 1 E) –1

30. Reduce:
$I = \tan 40° + \tan 13° + \tan 40°\tan 13°\tan 53°$

A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{4}{3}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{4}{5}$ E) $\dfrac{2}{3}$



Claves

NIVEL 1	9. C	17. A	24. D
1.	10. E	18. C	25. C
2.	NIVEL 2	19. D	26. E
3. B	11.	20. E	27. B
4. C	12.	NIVEL 3	28. B
5. E	13. B	21.	29. C
6. D	14. E	22.	30. B
7. A	15. C	23. A	
8. D	16. A		



Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: ÁNGULOS MÚLTIPLES

1 Reduce:

$E = \frac{1 + \cos 20°}{\text{sen}20°}$

A) tan10°　B) cot10°　C) tan20°
D) cot20°　E) tan15°

2 Calcula: sen2x, si: tanx + cotx = 5

A) $\frac{1}{2}$　B) $\frac{2}{5}$　C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{5}$　E) $\frac{5}{6}$

3 Resuelve:

cos2x + 2cosx + 1 = 0

A) π　B) $\frac{\pi}{3}$　C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{5}$　E) $\frac{\pi}{6}$

4 Reduce:

E = 8senxcosxcos2xcos4x

A) sen8x　B) sen4x　C) 0,5sen8x
D) 2sen8x　E) 2sen4x

5 Calcula $\cos\frac{\theta}{2}$ sabiendo que:

$\cos\theta = \frac{1}{4}, \ \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

A) $\frac{\sqrt{10}}{4}$　B) $\sqrt{10}$　C) $\frac{1}{4}$
D) $\sqrt{5}$　E) $\sqrt{2}$

6 Calcula $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ sabiendo que:

$\cos\alpha = \frac{1}{8}; \ \alpha \in \left\langle 2\pi; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

A) $-\frac{1}{4}$　B) $-\sqrt{7}$　C) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$
D) $\sqrt{7}$　E) $\frac{1}{4}$

7 Si: $\cos x = -\frac{1}{3} \wedge x \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \right\rangle$

Calcula: $\tan\frac{x}{2}$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $-\sqrt{2}$
D) -2 E) $\sqrt{3}$

8 Halla: $\cos\frac{\pi}{8}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
D) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9 Calcula:
$B = \tan 111°$

A) $\frac{-5}{13}$ B) $\frac{19}{44}$ C) $\frac{-117}{44}$
D) 3 E) 1

10 Calcula:
$$N = \frac{\cos 3x - 4\cos^3 x + 3\cos x - 1}{\cos 2x - 2\cos^2 x + 1 - \text{sen}60°}$$

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

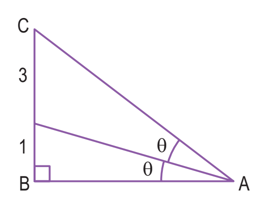
11 Calcula:
$A = \text{sen}12°\text{sen}48°\text{sen}72°$

A) sen36° B) cos36° C) $\frac{1}{4}\cos 36°$
D) $\frac{1}{4}\text{sen}36°$ E) sen72°

12 Calcula:
$$M = \frac{\tan 40° \,.\, \tan 80°}{\cot 20°}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 3

13 Halla: $\tan\theta$



A) $\sqrt{2}$ B) 1/2 C) 2
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

14 Calcula:
$M = \cos 12°\cos 48°\cos 72°$

A) 4cos36° B) cos36° C) cos36°/2
D) 2cos36° E) cos36°/4

Claves

1. B 2. B 3. A 4. A 5. A 6. C 7. C 8. D 9. C 10. C 11. D 12. C 13. D 14. E

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona según corresponda:

$\text{sen}2\theta$	$1-2\text{sen}^2\theta$
$\cos2\theta$	$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
$\tan2\theta$	$2\text{sen}\theta\cos\theta$

2. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\text{sen}32° = 2\text{sen}16°\cos16°$ ( )

II. $\cos30° = \cos^2 15° - \text{sen}^2 15°$ ( )

III. $\tan48° = \dfrac{2\tan24°}{1+\tan^2 24°}$ ( )

Razonamiento y demostración

3. Si: $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$; calcula:

$C = 13\text{sen}2\alpha + 1$

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

4. Si: $\cot\theta = \sqrt{7}$; calcula:

$L = 4\cos2\theta + 3$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

5. Calcula:

$L = \text{sen}\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta$

Si: $\theta = \pi/24$

A) $2^{-1}.\sqrt{3}$ B) $2^{-2}.\sqrt{3}$ C) $2^{-3}.\sqrt{3}$

D) $2^{-4}.\sqrt{3}$ E) $2^{-5}.\sqrt{3}$

6. Calcula:

$C = \text{sen}\phi\cos\phi\cos2\phi\cos4\phi\cos8\phi$

Si: $32\phi = \pi$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ E) $\dfrac{1}{16}$

7. Reduce:

$C = \dfrac{1+\cos2\theta+\text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta}$

A) $\text{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $2\text{sen}\theta$

D) $2\cos\theta$ E) 2

8. Reduce:

$L = \dfrac{1-\cos2\theta-\text{sen}2\theta}{2\text{sen}\theta} + \cos\theta$

A) 1 B) $\text{sen}\theta$ C) $2\text{sen}\theta$

D) $\text{sen}2\theta$ E) $1+\text{sen}2\theta$

9. Reduce:

$L = 7\cot\dfrac{x}{2} - 5\tan\dfrac{x}{2} - 2\csc x$

A) 4cotx B) 6cotx C) 8cotx

D) 10cotx E) 12cotx

10. Reduce:

$L = \csc2x + \csc4x + \csc8x + \cot8x$

A) cotx B) cot2x C) tanx

D) tan2x E) 2cotx

11. Señala el equivalente de:

$L = \sec65° + \sec40° + \tan40°$

A) cot10°30' B) tan10°30' C) cot12°30'

D) tan12°30' E) cot25°

12. Si θ es agudo, tal que $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$, calcula $\cos\dfrac{\theta}{2}$.

A) $\sqrt{0,125}$ B) $\sqrt{0,225}$ C) $\sqrt{0,325}$

D) $\sqrt{0,525}$ E) $\sqrt{0,625}$

13. Si: $\cos\theta = -2/7$; $180° < \theta < 270°$

Determina $\text{sen}\dfrac{\theta}{2}$.

A) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ B) $-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ C) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

D) $-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$ E) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

14. Si: $\cos\beta = 0,8$; $270° < \beta < 360°$

Calcula $\cos\dfrac{\beta}{2}$.

A) $\sqrt{0,7}$ B) $-\sqrt{0,7}$ C) $\sqrt{0,9}$

D) $-\sqrt{0,9}$ E) $-\sqrt{0,1}$

15. Si: $\text{sen}x = \dfrac{1}{3}$, calcula sen3x.

A) 1 B) $\dfrac{22}{27}$ C) $\dfrac{23}{27}$

D) $-\dfrac{22}{27}$ E) $-\dfrac{23}{27}$

16. Si: $\cos x = \dfrac{1}{4}$, calcula cos3x.

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $-\dfrac{11}{16}$ C) $\dfrac{11}{16}$

D) $-\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{11}{64}$

17. Si: $\tan x = 2$, halla tan3x.

A) 6 B) $\dfrac{11}{2}$ C) $\dfrac{1}{6}$

D) $\dfrac{2}{11}$ E) $-\dfrac{11}{2}$

18. Calcula:
$E = 3\text{sen}10° - 4\text{sen}^3 10°$

A) 1 B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

19. Calcula: $E = 3\text{sen}15° - 4\text{sen}^3 15°$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

20. Si: $3\text{sen}x - 2 = 0$, calcula sen3x.

A) 2 B) −2 C) $\frac{7}{27}$
D) $-\frac{7}{27}$ E) $\frac{22}{27}$

Resolución de problemas

21. Si el seno de un ángulo agudo es 3/5, ¿cuál es el coseno del doble de dicho ángulo?

A) 17/25 B) 2/25 C) 3/25 D) 6/25 E) 7/25

22. Si el coseno de un ángulo agudo es 1/3, ¿cuál es el coseno del doble de dicho ángulo?

A) 1/2 B) –7/9 C) 2/4 D) –3/5 E) –2/3

NIVEL 2

Comunicación matemática

23. Relaciona según corresponda:

$\text{sen}\frac{\theta}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$
$\cos\frac{\theta}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$
$\tan\frac{\theta}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

24. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}4° = \sqrt{\frac{1-\cos 8°}{2}}$ ( )

II. $\cos 24° = \sqrt{\frac{1+\cos 12°}{2}}$ ( )

III. $\tan 30° = \sqrt{\frac{1-\cos 15°}{1+\cos 15°}}$ ( )

Razonamiento y demostración

25. Si: $\text{sen}\theta - \cos\theta = 1/2$
Calcula: sen2θ

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) $-\frac{3}{4}$

26. Reduce:
$C = \frac{\text{sen}2\varphi\cot\varphi}{2} + \text{sen}^2\varphi$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) senφcosφ E) cos2φ

27. Reduce:
$L = \frac{\text{sen}2\theta\tan\theta}{2} - \cos^2\theta$

A) 1 B) 2 C) sen2θ
D) cos2θ E) − cos2θ

28. Reduce:
$C = \frac{\cos 2\theta - \cos^2\theta}{\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta}$

A) 1 B) −1 C) $-\tan^2\theta$
D) $\tan^2\theta$ E) $\cot^2\theta$

29. Reduce:
$L = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

A) 1 B) tanθ C) $\tan^2\theta$ D) cotθ E) $\cot^2\theta$

30. Si: $\text{sen}\varphi + \cos\varphi = n$
Halla: sen2φ

A) $n - 1$ B) $n^2 + 1$ C) $n^2 - 1$
D) $1 - n^2$ E) $2(n^2 - 1)$

31. Si θ es agudo, tal que $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$
Calcula $\tan\frac{\theta}{2}$.

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{7}$

32. Siendo α agudo, tal que $\tan\alpha = 2\sqrt{6}$. Calcula $\cos\frac{\alpha}{2}$.

A) $\sqrt{0,2}$ B) $\sqrt{0,3}$ C) $\sqrt{0,4}$ D) $\sqrt{0,5}$ E) $\sqrt{0,6}$

33. Si: $\tan\theta = \frac{\sqrt{33}}{4}$; $180° < \theta < 270°$
Determina $\cos\frac{\theta}{2}$.

A) $\sqrt{\frac{1}{7}}$ B) $-\sqrt{\frac{1}{7}}$ C) $\sqrt{\frac{3}{14}}$
D) $-\sqrt{\frac{3}{14}}$ E) $-\sqrt{\frac{2}{7}}$

34. Siendo: $\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{11}}{6}$; $450° < \beta < 540°$
Calcula $\tan\frac{\beta}{2}$.

A) $\sqrt{11}$ B) $-\sqrt{11}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{11}$
D) $-\frac{\sqrt{11}}{11}$ E) $-\frac{\sqrt{11}}{10}$

35. Calcula:

$$C = \frac{\csc 40° + \csc 80° + \csc 160°}{\cot 20°}$$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 4

36. Reduce:

$$K = \left[\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\tan\alpha$$

A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 1/4 E) 4

37. Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}^3x + \text{sen}3x}{\text{sen}x}$$

A) $3\csc^2x$ B) $3\sec^2x$ C) 3sen^2x
D) $3\cos^2x$ E) $3\tan^2x$

38. Simplifica:

$$E = (\cos3x - 4\cos^3x)\sec x$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) −3 E) −2

39. Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

A) 0 B) 2 C) 4cos2x
D) −4cos2x E) −2

Resolución de problemas

40. Si el coseno de un ángulo agudo es 1/2, ¿cuál es la cotangente de la mitad de dicho ángulo?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

41. Si el seno de un ángulo agudo es 3/5, ¿cuál es la tangente de la mitad de dicho ángulo?

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3
D) 1/2 E) $\sqrt{3}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

42. Relaciona según corresponda:



sen3θ	$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$
cos3θ	$3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$
tan3θ	$4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

43. Indica verdadero (V) a falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}30° = 3\text{sen}10° - 4\text{sen}^310°$ ( )

II. $\cos15° = 4\cos^35° - 3\cos5°$ ( )

III. $\tan45° = \frac{3\tan 15° - \tan^3 15°}{1 - 3\tan^2 15°}$ ( )

Razonamiento y demostración

44. Sea: $a + b + c = \pi$
Simplifica la siguiente expresión:
$\text{sen}(3a + 2b + 2c).\text{sen}(a + 2b + 2c) + \cos(b + c).\cos(b + 2a + c)$

A) −1 B) 0 C) 1
D) cos2a E) cos2b

45. Si A, B y C son los ángulos internos de un triángulo y se cumple:
$\text{sen}(A + B)\cos(A + B) = -\frac{1}{2}$; ¿cuánto vale 1 + tanC?

A) 0 B) 1 C) 2
D) −1 E) $\frac{1}{2}$

46. $U = \sec A\left[\left(\cos\frac{A}{2} + \text{sen}\frac{A}{2}\right)^2 - \text{sen}A\right]$

$N = \text{sen}A\left[\left(\cos\frac{A}{4} + \text{sen}\frac{A}{4}\right)^2 - \text{sen}\frac{A}{2}\right]$

$I = \cos A\left[\left(\cos\frac{A}{2K} + \text{sen}\frac{A}{2K}\right)^2 - \text{sen}\frac{A}{K}\right]$

$K > 1$

Simplifica la expresión: $U - N + I - \frac{1}{\cos A}$

A) senA − cosA B) $\text{sen}\frac{A}{K} + \cos\frac{A}{K}$
C) $1 + \text{sen}\frac{A}{K}$ D) cosA − senA
E) $\text{sen}\frac{A}{K} - \cos\frac{A}{K}$

47. Halla la suma de los valores máximos y mínimos de la siguiente expresión: $E = A\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + B\cos x$
A, B son constantes reales.

A) B B) A C) $\frac{B}{2}$ D) $\frac{A}{2}$ E) 0

48. De acuerdo al gráfico, determina el valor de cos2θ.

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{5}{6}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{2}{5}$

49. Reduce:

$P = \cot\alpha \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1 + \cos\alpha)$

A) cosα B) senα C) secα
D) cscα E) 1

50. Si: $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$; $\alpha \in \langle 180°; 270°\rangle$

Calcula: $\sqrt{30}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

51. Reduce:

$M = \cot x + \cos x\left(\tan x - \tan\frac{x}{2}\right)$

A) tanx B) cotx C) secx
D) cscx E) senx

52. Si: secx = cotAcotB

Calcula: $\tan^2\frac{x}{2}$

A) cos(A – B)sec(A + B)
B) cos(A + B)sec(A – B)
C) sen(A + B)sec(A – B)
D) sen(A – B)sec(A + B)
E) cos(A + B)sec(A + B)

53. Si:

$\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{4} = 2\csc x$

Calcula $\cos\frac{x}{2}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{7}$

54. Simplifica:

$P = \tan\frac{x}{2} + 2\text{sen}^2\frac{x}{2}\cot x$

A) cosx B) senx C) tanx D) secx E) cscx

55. Calcula:

E = 4sen5 . sen55° . sen65°

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

56. Calcula:

E = cos20° . cos40° . cos100°

A) $\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) –2

57. Calcula:

E = 4sen25° . sen35° . sen85°

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

58. Calcula:

E = cos10° . cos50° . cos110°

A) $\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. Simplifica:

$E = \tan\frac{2\theta}{3}\cdot\tan\left(\frac{\pi-2\theta}{3}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi+2\theta}{3}\right)$

A) tan2θ B) $\frac{1}{4}$tan2θ C) tan6θ
D) tan3θ E) $\tan\frac{\theta}{2}$

60. Simplifica:

$E = \tan\frac{\theta}{6}\cdot\tan\left(\frac{2\pi-\theta}{6}\right)\cdot\tan\left(\frac{2\pi+\theta}{6}\right)$

A) $\tan\frac{\theta}{2}$ B) $\tan\frac{\theta}{3}$ C) $\frac{1}{4}\tan\frac{\theta}{2}$
D) $4\tan\frac{\theta}{2}$ E) tan3θ

Resolución de problemas

61. Si la secante de un ángulo agudo es 2, ¿cuál es el coseno del triple de dicho ángulo?

A) –2/3 B) –1 C) 2/3
D) –2/5 E) –3/5

62. Si la cosecante de un ángulo agudo es 5/4, ¿cuál es el seno del triple de dicho ángulo?

A) 22/125 B) 33/125 C) 44/125
D) 53/125 E) 51/125



Claves

NIVEL 1	13. C	26. A	40. A	53. A
1.	14. D	27. E	41. C	54. B
2.	15. C	28. C	NIVEL 3	55. C
3. C	16. B	29. C	42.	56. B
4. D	17. D	30. C	43.	57. D
5. D	18. C	31. B	44. D	58. D
6. E	19. C	32. E	45. C	59. A
7. D	20. E	33. D	46. D	60. A
8. B	21. E	34. A	47. B	61. B
9. E	22. B	35. C	48. C	62. C
10. A	NIVEL 2	36. C	49. A	
11. C	23.	37. D	50. E	
12. E	24.	38. D	51. D	
	25. B	39. B	52. B	



Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Calcula:
$2\cos80°\cos10° - \cos70°$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

2 Reduce:
$2\text{sen}7x\text{sen}3x + \cos10x$

A) cos2x B) cos4x C) cos6x
D) cos8x E) cos10x

3 Reduce:
$E = 2\text{sen}4x\cos2x - \text{sen}6x$

A) senx B) sen2x C) sen3x
D) sen5x E) sen4x

4 Reduce:
$A = 2\cos5x\cos x - \cos6x$

A) cos2x B) cos3x C) cos4x
D) cos5x E) cos8x

5 Transforma la siguiente expresión:
$E = \text{sen}5x\cos2x - \text{sen}3x\cos4x$

A) $2\text{sen}x\cos^3x$ B) 2senxcosx
C) senxcos2x D) sen2xcosx
E) $2\text{sen}^2x\cos x$

6 Reduce:
$E = 2\text{sen}5x\text{sen}3x + \cos8x$

A) sen2x B) cos2x C) cos3x
D) cos4x E) cos6x

7 Simplifica:

$$E = \frac{\text{sena} + \text{sen3a} + \text{sen5a}}{\text{cosa} + \text{cos3a} + \text{cos5a}}$$

A) seca B) csc2a C) tan3a
D) cota E) sen2a

8 Calcula:

$$E = \frac{\text{2sen3acosa} - \text{sen4a}}{\text{2sen2acos4a} - \text{sen6a}}$$

A) –cosa B) sen2a C) 1
D) –2 E) –1

9 Reduce:

$$R = \frac{\cos 4\alpha \cos 3\alpha - \cos 5\alpha \cos 2\alpha}{\text{sen}2\alpha}$$

A) senα B) cos2α C) tanα
D) cotα E) senα–cosα

10 Transforma a producto:

$E = \cos 4x + \cos 8x + 2 - 4\text{sen}^2x$

A) cos2xcos3x B) $4\cos 2x\,\text{sen}^2 3x$
C) $2\cos 2x\,\text{sen}^2 2x$ D) $4\cos 2x \cos^2 3x$
E) $4\cos 4x \cos^2 2x$

11 Reduce:

$$H = \frac{2\text{sen}3x\cos x - \text{sen}4x}{2\cos 5x\cos 4x - \cos 9x}$$

A) 2senx B) 2cosx C) senx
D) cosx E) cosx

12 Reduce la expresión:

$M = 4\text{sen}5°\cos 5°(\cos^2 10° - \text{sen}^2 10°) + \text{sen}10°$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

13 Reduce:

$$E = \text{sen}4x + \frac{\text{sen}^2 2x}{\cos x\,\text{sen}x + \dfrac{\text{sen}x}{\cos x + \tan x\,\text{sen}x}}$$

A) tanx B) cos2xcos3x
C) 2senxcos3x D) sen2xsen3x
E) 2sen3xcosx

14 A partir de la figura mostrada. Halla k, siendo:

AB = 2; BD = 2k + cos20°

B
20°
40°
D
A
C

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

Claves

1. A	3. B	5. D	7. C	9. A	11. A	13. E
2. B	4. C	6. B	8. E	10. D	12. E	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Si: $A + B + C = 180°$
Completa en los espacios las razones trigonométricas que corresponden para que se cumplan las identidades:

- $\text{sen}A + \square + \square = 4\cos\frac{A}{2} \times \cos\frac{B}{2} \times \cos\frac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 4\ \square \times \square \times \square + 1$
- $\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C = 4\text{sen}A \times \text{sen}B \times \square$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\ \square\ \square - 1$

2. Transforma a suma a diferencia las siguientes expresiones:

- $2\text{sen}30°\cos 10°$ = ______
- $2\cos 6x\,\text{sen}2x$ = ______
- $2\cos(46°)\,\text{sen}(-6°)$ = ______
- $-2\text{sen}\left(\frac{9x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{5x}{2}\right)$ = ______
- $2\cos 40°\cos b$ = ______

Razonamiento y demostración

3. Simplifica:
$$G = \frac{\text{sen}20° + \text{sen}40° + \text{sen}60°}{\cos 10° + \cos 30° + \cos 50°}$$

A) $\sqrt{3}\,\text{sen}40°$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}40°$ C) $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}40°$
D) $2\text{sen}40°$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{sen}40°$

4. Reduce:
$$H = \frac{\text{sen}7x - \text{sen}x}{\cos x - \cos 7x}$$

A) tan3x B) cot3x C) tan4x
D) cot4x E) –cot4x

5. La expresión: $\frac{\text{sen}x + \text{sen}y}{\cos x + \cos y}$; es igual a:

A) $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ B) $\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ C) $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
D) $\cot\left(\frac{x+y}{2}\right)$ E) $\frac{\text{sen}(x+y)}{\cos(x+y)}$

6. Transforma a producto:
$R = \text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}9x + \text{sen}11x$

A) 4cosxcos3xsen7x
B) 2cosxcos3xsen7x
C) 4cos2xcos3xsen7x
D) 2cos2xcosxsen7x
E) 2cos2xcos3xsen7x

7. Reduce:
$Q = \text{sen}47°\cos 17° - \cos 60°\cos 26°$

A) 4 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) $\frac{1}{4}$

8. Calcula:
$P = \sec 41°\sec 4°(\cos 37° + \sec 45°\text{sen}30°)$

A) 1 B) 4 C) 2 D) 3 E) 5

9. Reduce la expresión:
$E = \frac{1}{2}\csc 10° - 2\cos 20°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) –2 E) –1

10. Reduce:
$E = 2\text{sen}3x\cos 2x - \text{sen}x$

A) senx B) sen3x C) sen4x
D) sen5x E) sen6x

11. Reduce:
$E = 2\text{sen}x\cos 3x + \text{sen}2x$

A) 1 B) –1 C) sen2x
D) sen4x E) cos2x

Resolución de problemas

12. Se tiene un triángulo MNP tal que: $\cos M = \frac{1}{2}$; $\cos N = \frac{1}{2}$
Halla el valor de cosP.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1/2 C) 3/5 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 4/5

13. Halla el máximo valor que puede tener la función T(x), si se cumple que:
$T(x) = 2\cos(x + 60°) + \cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}x$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) 2 E) $2\sqrt{3}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Transforma a producto las siguientes expresiones:

- $\text{sen}5x + \text{sen}2x$ = ______
- $\cos\theta + \cos 5\theta$ = ______
- $-\text{sen}\alpha + \text{sen}7\alpha$ = ______
- $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{3}$ = ______
- $\text{sen}\frac{\pi}{10} + \text{sen}\frac{\pi}{9}$ = ______
- $\text{sen}2x + \cos 4x$ = ______
- $\text{sen}4x + \cos 2x$ = ______

15. Completa (V) verdadero o (F) falso según corresponda en cada expresión:

- $\text{sen}3x + \cos 5x = 2\cos(45° + x)\cos(45° - 4x)$ ( )
- $\cos 100° + \cos 140° = 2\cos 120° \cos 20°$ ( )
- $\cos 33° - \text{sen}87° = -2\text{sen}18° \text{sen}15°$ ( )
- $\text{sen}5\theta + \text{sen}\theta = 2\text{sen}3\theta\,\text{sen}2\theta$ ( )
- $\cos 5\theta + \cos\theta = 2\text{sen}3\theta\cos 2\theta$ ( )

Razonamiento y demostración

16. Reduce:
$$H = \frac{\text{sen}x + \text{sen}3x}{\text{sen}2x + \text{sen}4x}$$

A) $\frac{\text{sen}4x}{\text{sen}3x}$ B) 1 C) $\frac{\cos 2x}{\text{sen}3x}$
D) $\frac{\text{sen}2x}{\text{sen}3x}$ E) sen2x

17. Transforma a producto la expresión:
$E = \text{sen}A + \text{sen}2A + \text{sen}3A$

A) $4\text{sen}\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos A$ B) $\text{sen}A\cos\frac{3A}{2}$
C) $2\cos\frac{3A}{2}\text{sen}A\,\text{sen}\frac{A}{2}$ D) $4\cos\frac{3A}{2}\text{sen}A\,\text{sen}\frac{A}{2}$
E) $3\cos\frac{3A}{2}\cos 2A\cos A$

18. Transforma a producto:
$E = \text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}7x$

A) sen4xsen12x B) sen16xcos8x
C) 4senxsen2xcos4x D) sen4xsen2x
E) 4cosxcos2xsen4x

19. Si: $P(x) = \text{sen}3x\cos 2x + \text{sen}3x\cos 4x - \text{sen}x\cos 6x$

Calcula: $P\left(\frac{\pi}{30}\right)$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. Reduce:
$E = 2\text{sen}5x\cos x - \text{sen}6x$

A) sen2x B) sen4x C) 0
D) 1 E) senx

21. Reduce:
$$H = \frac{2\text{sen}3x\cos x - \text{sen}4x}{2\cos 5x\cos 4x - \cos 9x}$$

A) 2senx B) 2cosx C) senx
D) cosx E) cos2x

22. Halla el valor de la expresión:
$$R = \frac{2\text{sen}40° \cdot \cos 20° - \text{sen}20°}{2\cos 35° \cdot \cos 10° - \cos 25°}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

23. Reduce la siguiente expresión:
$M = 2\text{sen}7\theta\,\text{sen}5\theta - 2\text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta$

A) $\text{sen}^2 8\theta\cos 5\theta$ B) $\text{sen}^2 8\theta\,\text{sen}4\theta$
C) $\text{sen}^2 8\theta\sec 4\theta$ D) $\text{sen}^2 8\theta\csc 4\theta$
E) $\text{sen}^2 8\theta\,\text{sen}5\theta$

24. Reduce:
$P = (\text{sen}38° + \cos 68°)\sec 8°$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Resolución de problemas

25. En un triángulo ABC ($C > 90°$), la suma del seno del doble del ángulo A y el seno del doble del ángulo B es igual a:
$$\text{sen}2C + \frac{2\cos A \cdot \cos B}{\text{sen}C}$$

Calcula el valor de: tanC

A) –1 B) 1 C) 1/2
D) $\sqrt{2}$ E) 2

26. Halla la suma del máximo y mínimo valor de la siguiente expresión trigonométrica:
$M = \text{sen}(2x + 10°)\text{sen}(20° - 2x)$

A) 1/2 B) 1 C) –1
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

27. Compara las siguientes cantidades:

(M) $\text{sen}10°\text{sen}50° + \text{sen}130°\text{sen}610° - \text{sen}430°\cos 280°$
(N) $\frac{24}{25}\text{sen}34° - \text{sen}52°\text{sen}88°$

A) 2M = 3N B) M = N C) 3M = N
D) M = 3N E) 3M = 2N

28. En qué tipo de triángulo se cumple:
$\text{sen}2A + \text{sen}2B = \text{sen}2C$
A; B y C son los ángulos del triángulo.

A) Obtuso B) Triángulo rectángulo
C) Obtusángulo D) Oblicuángulo
E) Isósceles

Razonamiento y demostración

29. Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}3\theta - \text{sen}\theta}{\cos\theta - \cos 3\theta}$$

A) $\tan 2\theta$ B) $\cot 2\theta$ C) $\tan 2\theta$
D) $\cot\theta$ E) 1

30. Siendo:
$M = \text{sen}(270° + x) + \cos(90° + x)$
$N = 2\cos(360° - x) + 4\text{sen}(-360° - x)$
Encuentra los valores que toma M + N.

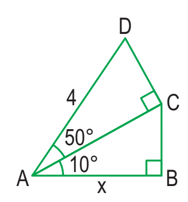
A) $\langle -\sqrt{26}, \sqrt{26} \rangle$ B) $[-26; 26]$
C) $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$ D) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
E) $[-13; 13]$

31. Calcula el valor de:

$$K = \frac{\text{sen}^2\frac{\pi}{14} + \text{sen}^2\frac{3\pi}{14} + \text{sen}^2\frac{5\pi}{14}}{\cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{5\pi}{14}}$$

A) 2 B) $\frac{6}{5}$ C) 1
D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{7}{5}$

32. Del gráfico, calcula x.
($\cos 40° = 0{,}766$)



A) 2,532 B) 3,156 C) 2,216
D) 3,108 E) 2,748

33. Se define la función:

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{9} - x\right)$$

Halla: $f(x)_{\text{máx.}}$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

34. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$K = \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14}$$

A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{8}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\sqrt{7}$

35. Simplifica:
$E = \cos(A + B)\cos(A - B) + \text{sen}^2A$

A) sen^2A B) $\cos^2A$ C) $\tan^2B$
D) $\cos^2B$ E) sen^2B

36. Simplifica:

$$P = \frac{\cos 5\theta - \cos\theta}{\text{sen}\theta - \text{sen}5\theta}$$

A) $\tan 2\theta$ B) $\cot 2\theta$ C) 1
D) $-\tan 2\theta$ E) $\tan 3\theta$

Resolución de problemas

37. Se tienen las siguientes igualdades:
$P = \cos(x + y - z) + \cos(y + z - x)$
$Q = \cos(x + y + z) + \cos(z + x - y)$
Halla el valor de:
$E = \sqrt{(P + Q)\sec x \sec y \sec z}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

38. Se tienen dos ángulos α y β, tal que:
$\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \theta \ \wedge \ \text{sen}\beta = 2\cos\alpha\,\text{sen}\theta$
Halla el valor de $\cos 2\theta$, si:
$\theta \neq k\pi + \alpha; \theta \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{\beta}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3 D) 1 E) –1/3

39. Si los ángulos de un triángulo ABC cumplen la relación:
$\text{sen}A + \text{sen}C = 2\text{sen}B$;
calcula el valor de:
$E = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$

A) 2 B) 3 C) 7 D) 5 E) 4



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. C
4. D
5. A
6. A
7. E
8. C
9. A
10. D
11. D
12. B
13. D

NIVEL 2
14.
15.
16. D
17. A
18. E
19. B
20. E
21. A
22. C
23. C
24. A
25. A
26. E

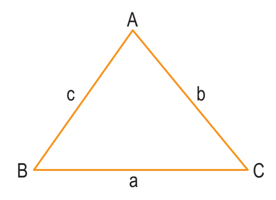
NIVEL 3
27. D
28. B
29. B
30. C
31. D
32. A
33. D
34. B
35. D
36. E
37. B
38. A
39. B

Aplicamos lo aprendido



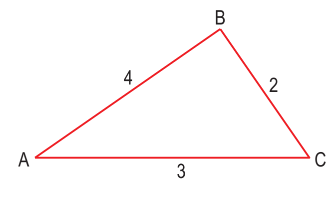
TEMA 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1 Resuelve un triángulo ABC, si: $a = \sqrt{2}$; $B = 60°$ y $A = 45°$. Halla el valor de b.



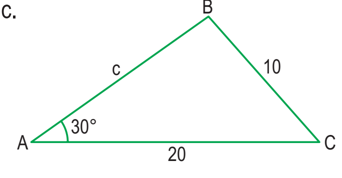
A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) $\sqrt{3}$

2 De la figura, calcula: cosB



A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{16}{11}$ E) $\frac{11}{16}$

3 Halla c.

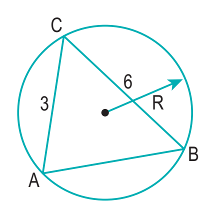


A) 10 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

4 Halla x.

A) $5 + 10\sqrt{2}$ B) 5 C) 10
D) $\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

5 Calcula senA, si R = 4.

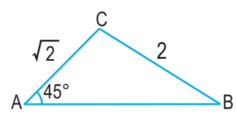


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{6}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

6 Calcula x.

A) 5 B) 6 C) 4 D) 7 E) 9

7 Calcula: cosC.



A) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
D) $\dfrac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$

8 En un triángulo ABC se sabe que:
$a = 8$; $b = 7$ y $c = 5$. Se traza una ceviana $\overline{AM}$ tal que $BM = 3$.
Calcula la medida de $\overline{AM}$.

A) 24 B) $\sqrt{19}$ C) $2\sqrt{13}$ D) $\sqrt{15}$ E) 19

9 Resuelve un triángulo ABC, si: $a = 21$; $b = 12$ y $A = 60°$. Da como respuesta senB.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{1}{21}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$
D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

10 Halla el mayor ángulo de un triángulo si sus lados son: 7k; 8k y 13k.

A) 150° B) 120° C) 125°
D) 115° E) 135°

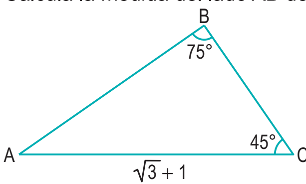
11 En un triángulo ABC: $a = 12$; $b = 10 \wedge m\angle C = 53°$
Calcula c.

A) 10 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

12 En un triángulo ABC: $2a = 3c$; reduce: $k = \dfrac{\text{senA} + \text{senC}}{\text{senA} - \text{senC}}$

A) 3 B) $\dfrac{5}{2}$ C) 5 D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{3}{2}$

13 Calcula la medida del lado AB de la figura.



A) 4 B) 5 C) $\sqrt{3}$ D) 0,5 E) 2

14 En un triángulo ABC, $A = 37°$; $B = 30°$; $a = x + 1$ y $b = x - 1$.
Calcula x.

A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

Claves

1. E	3. D	5. B	7. D	9. D	11. A	13. E
2. E	4. A	6. D	8. B	10. B	12. C	14. B

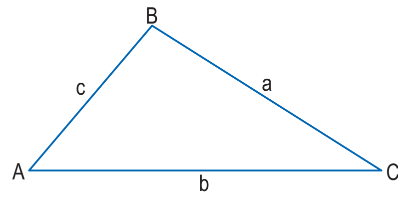
Practiquemos



NIVEL I

Comunicación matemática

1. Dado el siguiente triángulo.



Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

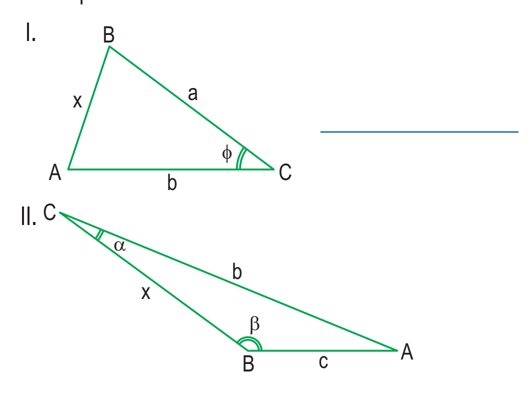
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos A$ ( )
- $\cos B = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2ac}$ ( )
- $\dfrac{A}{\text{sen}B} = \dfrac{C}{\text{sen}C} = 22$ ( )
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc\cos A$ ( )
- $(a - c)\tan\left(\dfrac{A + C}{2}\right) = (a + c)\tan\left(\dfrac{A - C}{2}\right)$ ( )

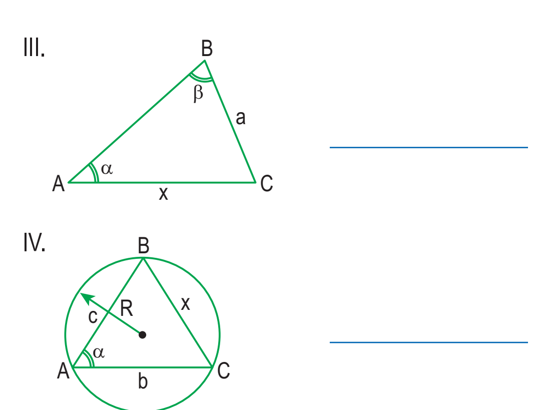
2. De los siguientes enunciados, ¿cuáles son los casos acerca de la resolución de triángulos oblicuángulos?

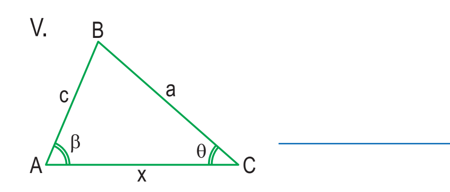
I. Conociendo un lado y dos ángulos adyacentes a él.
II. Conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
III. Conociendo tres lados y un ángulo opuesto.

A) I B) II C) III D) I y II E) II y III

3. Observa los siguientes gráficos y coloque la ley que deberá utilizar para hallar x.

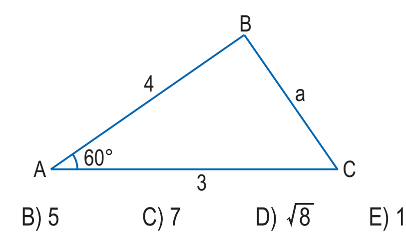






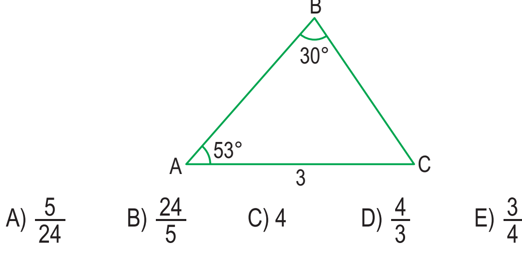
Razonamiento y demostración

4. De la figura, calcula el valor de a.



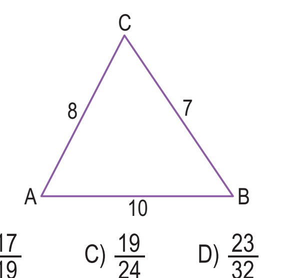
A) $\sqrt{13}$ B) 5 C) 7 D) $\sqrt{8}$ E) 1

5. Halla la medida del lado BC.



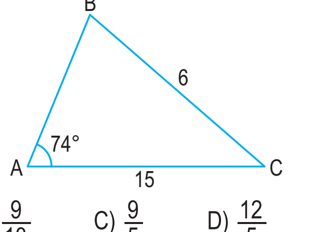
A) $\frac{5}{24}$ B) $\frac{24}{5}$ C) 4 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

6. Calcula el valor de cosA.



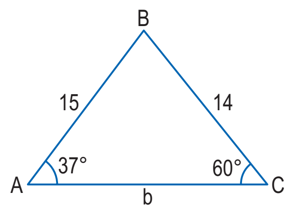
A) $\frac{23}{31}$ B) $\frac{17}{19}$ C) $\frac{19}{24}$ D) $\frac{23}{32}$ E) $\frac{25}{32}$

7. Determina el senB.



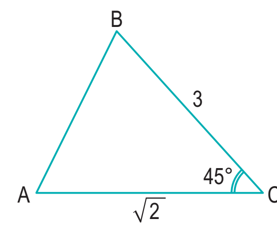
A) $\frac{13}{17}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{9}{5}$ D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{11}{9}$

8. Aplica la ley de proyecciones y calcula el valor de b.



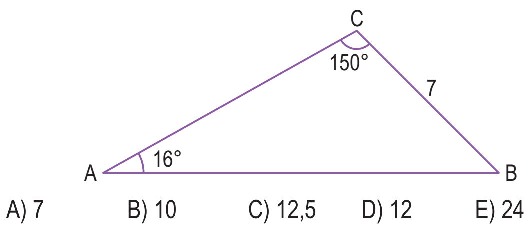
A) 21 B) 16 C) 19 D) 23 E) 12

9. Calcula la longitud de $\overline{AB}$.



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}$ E) 9

10. Calcula la medida del lado AB de la figura.



A) 7 B) 10 C) 12,5 D) 12 E) 24

Resolución de problemas

11. En un triángulo ABC, simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}B + \text{sen}C}{\text{sen}C + \text{sen}A} + \frac{a - b}{c + a}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) a
D) b + c E) 0

12. En un triángulo ABC los lados están representados por 3 números enteros consecutivos. Si el ángulo mayor es el doble del menor, halla la longitud del mayor lado.

A) 7 B) 6 C) 10 D) 13 E) 9

13. En un triángulo ABC; $m\angle C = 60° \wedge a = 3b$; determina el valor de:
$M = \tan(A - B)$

A) $5\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{4}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $12\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

14. Las diagonales de un paralelogramo miden a y b, formando un ángulo agudo C. El área del paralelogramo es:

A) absenC B) abcosC C) $\frac{1}{2}$abcscC
D) $\frac{1}{2}$absenC E) $\frac{1}{2}$abcosC

NIVEL 2

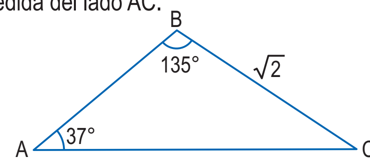
Comunicación matemática

15. Dada las siguientes expresiones indica cuáles son falsas.
En el triángulo ABC, se cumple:
I. $a = b\cos C + c\cos B$
II. $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B$
III. $(a + c)\tan\left(\frac{A - C}{2}\right) = (a - c)\tan\left(\frac{A + C}{2}\right)$

A) I B) II C) III
D) I y II E) II y III

Razonamiento y demostración

16. Halla la medida del lado AC.



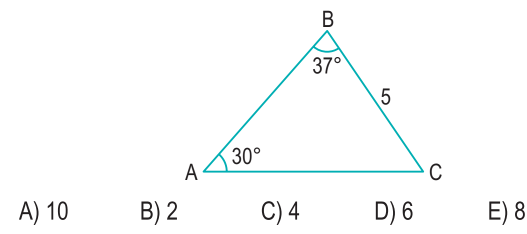
A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

17. En un triángulo ABC reduce:

$$K = \frac{a}{\text{sen}A} - \frac{b}{\text{sen}B}$$

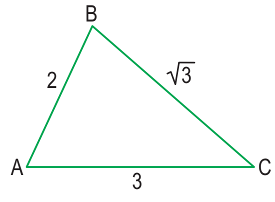
A) 0 B) 1 C) ab
D) c E) abc

18. Calcula la medida del lado AC de la figura:



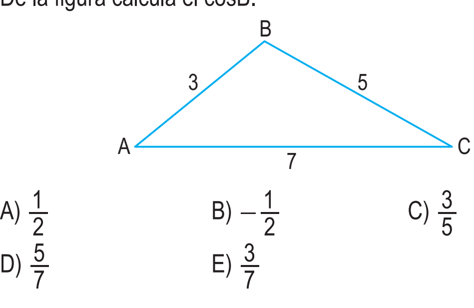
A) 10 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

19. De la figura halla el cosA.



A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{6}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{3}{5}$

20. De la figura calcula el cosB.



A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

Resolución de problemas

21. Halla el mayor ángulo de un triángulo cuyas longitudes de los lados son proporcionales a 7; 8 y 13.

A) 75° B) 90° C) 120°
D) 135° E) 150°

22. Las longitudes de los lados de un triángulo son: $\sqrt{26}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{18}$, calcula el área de dicho triángulo.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

23. Si el coseno del mayor ángulo agudo de un triángulo de lados enteros consecutivos es 1/5, halla el perímetro de dicho triángulo.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

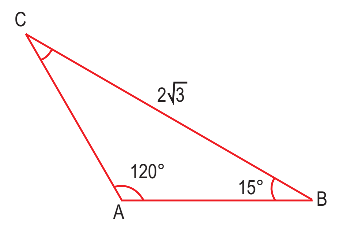
24. Las longitudes de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos y al ángulo mayor es el doble del menor. La relación del lado mayor y el lado menor es:

A) tan θ B) 3senθ C) 2cosθ
D) cos2θ E) cosθsenθ

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. Dado el siguiente triángulo, coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:



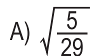
I. $AC = 2\sqrt{5}$ ( )
II. $m\angle ACB = 45°$ ( )
III. $AB = 3\sqrt{3}$ ( )
IV. $m\angle ACB = 3m\angle ABC$ ( )

Razonamiento y demostración

26. En un triángulo ABC, reduce:
E = bcosC + ccosB + acosB + bcosA − a

A) b B) a C) c
D) a + b E) a + b + c

27. De la figura calcula el valor de BC.

A) 

B) $\frac{29}{5}$

C) $\sqrt{\frac{29}{5}}$

D) $\sqrt{\frac{17}{5}}$

E) 4

28. De la figura calcula el valor de a.

A) $\frac{6}{5}$

B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C) $5\sqrt{6}$

D) $6\sqrt{5}$

E) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

29. En un triángulo ABC, se cumple: $a^2 + b^2 + c^2 = m$
Calcula: E = abcosC + bccosA + accosB

A) 1 B) m C) 2m
D) $\frac{m}{2}$ E) $\frac{m}{3}$

30. En un triángulo ABC el perímetro es 24 y el circunradio mide 5.
Halla: N = senA + senB + senC

A) 1,2 B) 2,4 C) 2,8
D) 2,6 E) 1,8

31. En un triángulo cualquiera ABC se cumple que: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$
Calcula: N = bccosA + accosB + abcosC

A) 10 B) 20 C) 5
D) $\frac{13}{2}$ E) 15

Resolución de problemas

32. Calcula los lados de un triángulo sabiendo que son números enteros consecutivos y que el ángulo mayor es el doble del menor.

A) 4; 5 y 6 B) 7; 3; 9 C) 6; 7; 8
D) 9; 7; 5 E) 3; 6; 7

33. En un triángulo ABC, cuyos lados miden: $a = \sqrt{3} + 1$; $b = \sqrt{6}$ y $c = 2$. El punto M está en AC y $m\angle BMC = 105°$. Halla la medida del ángulo A y la medida del segmento BM.

A) 45° y 1 B) 75° y 2 C) 60° y 2
D) 15° y 4 E) 75° y 2



Claves

NIVEL 1	7. D	NIVEL 2	21. C	27. D
1.	8. C	15. B	22. C	28. E
2. D	9. D	16. D	23. D	29. D
3.	10. C	17. A	24. C	30. B
4. A	11. B	18. D	NIVEL 3	31. C
5. B	12. B	19. C	25.	32. A
6. D	13. C	20. B	26. C	33. B
	14. D			

MARATÓN Matemática

- Calcula el valor de:
  $T = sen^2 11° + cos^2 19° - cos19°sen11°$

Resolución:

Recordemos:

$\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$2sen\alpha\cos\theta = sen(\alpha + \theta) + sen(\alpha - \theta)$

$\cos\alpha - \cos\theta = -2sen\left(\frac{\alpha + \theta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)$

Luego tenemos:

$T = sen^2 11° + cos^2 19° - cos19°sen11°$

$2T = 2sen^2 11° + 2cos^2 19° - 2sen11°cos19°$

$2T = 1 - cos22° + 1 + cos38° - [sen30° + sen(-8°)]$

$2T = 2 + cos38° - cos22° - \frac{1}{2} + sen8°$

$2T = \frac{3}{2} - 2sen\left(\frac{38° + 22°}{2}\right)sen\left(\frac{38° - 22°}{2}\right) + sen8°$

$2T = \frac{3}{2} - 2sen30°sen8° + sen8°$

$2T = \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)sen8° + sen8°$

$\Rightarrow 2T = \frac{3}{2}$

$\therefore T = \frac{3}{4}$

1. Halla el valor de:

$M = \frac{sen3\theta}{sen\theta} - 2cos2\theta$

A) 1 B) 2 C) $1 + sen^2\theta$
D) $1 - sen^2\theta$ E) 0

2. Halla el valor de la siguiente expresión:

$k = 4sen^4\theta + 4cos^4\theta - cos4\theta$

A) 3/4 B) 1 C) –1
D) 3 E) – 3/4

3. En un triángulo PQR recto en Q, halla el valor de: senPsenR, si: $\frac{9}{q^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{r^2}$

A) 9 B) 3 C) 1/3
D) 1 E) 6

4. Dos automóviles parten simultáneamente de una estación con movimiento rectilíneo uniforme siguiendo pistas que forman un ángulo de 60°. Las velocidades que llevan son de x y 72 km/h calcula el valor de x si al cabo de 3 horas y 30 minutos la distancia que los separa es de $126\sqrt{3}$ km.

A) $18\ \frac{km}{h}$ B) $36\ \frac{km}{h}$ C) $9\ \frac{km}{h}$
D) $72\ \frac{km}{h}$ E) $36\sqrt{3}\ \frac{km}{h}$

5. Halla el equivalente de:

$F = \frac{cosx + cosy}{senx + seny}$

Si: x + y = 53°

A) 3/4 B) 4/3 C) 1/2
D) 1 E) 2

6. Si: cot40° = m

Calcula:

$A = \frac{csc220° \times sen130°}{csc410° \times cos390°}$

A) $-M^2$ B) M^2 C) $1/M^2$
D) 1/M E) M

7. Simplifica:

$M = \frac{P\cos 2\beta + \cos 3\beta + \cos\beta}{Psen2\beta + sen3\beta + sen\beta}$

A) tan3β B) cot3β C) cot2β
D) tanβ E) tan2β

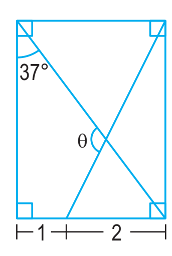
8. Si: $x + y = \pi/3$

Halla el valor de:

$P = \frac{senx - seny}{cosy - cosx}$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

9. De la figura, halla cotθ.



A) –2 B) –1/4 C) –4/3
D) 3/4 E) –1/2

RAZONA:

Instrucciones: completa los tableros subdivididos en 9 cuadrados llenando las celdas vacías con los números del 1 al 9, sin que se repita ninguna cifra, en cada fila, ni en cada columna, ni en cada cuadrado.

1.

8	4							1
			8	6				4
		6			9		3	7
			5		8		9	
1	5		4		3		7	6
	2		1		6			
4	8		6			3		
3				1	7			
2							6	5

2.

			3	2		7		
1		6			8		5	
		9					1	
			2			3	7	
	6	1				5	9	
	5	2			7			
	4					8		
	2		7			6		1
		5		8	3			

3.

9			8		2			
	6	1			9	2		
			5		4	7	6	9
		6			5			
	9	8	6		3	1	2	
			1			3		
8	5	3	4		1			
		4	2			9	5	
			7		6			8

4.

	9	5		2		8		
						3		9
3	8			4				6
			6	1	2			
2		8	3	7	4	6		1
			8	5	9			
5				6			4	2
8		7						
		9		3		7	5	

5.

8				1	7		6	
4		7		6	5			
9		5		8		3	1	
3			2					1
	7						4	
5					4			8
	8	6		7		5		4
			5	4		2		6
	5		6	2				9

6.

	4		2				3	7
6				9			1	
		9	7		1			8
	7					6	4	
		6				3		
	3	5					7	
9			4		8	7		
	5			2				6
8	1				9		5	

7.

				5			7	2
		4		7		9		8
		5	9		8	1	4	
3	9	7						
			7	4	3			
						3	1	7
	3	1	4		7	2		
6		9		2		7		
5	7			3				

8.

	6						5	
7			6	3	5			4
	5	9		4		1	2	
	1	3		6		2	9	
6			7		9			8
	7						4	
	3	7	4		6	8	1	
			2	7	8	3		
2								9

Respuestas:

1.

8	4	9	7	3	5	6	2	1
7	3	2	8	6	1	9	5	4
5	1	6	2	4	9	8	3	7
6	7	4	5	2	8	1	9	3
1	5	8	4	9	3	2	7	6
9	2	3	1	7	6	5	4	8
4	8	7	6	5	2	3	1	9
3	6	5	9	1	7	4	8	2
2	9	1	3	8	4	7	6	5

2.

5	8	4	3	2	1	7	6	9
1	7	6	9	4	8	2	5	3
2	3	9	5	7	6	4	1	8
4	9	8	2	1	5	3	7	6
7	6	1	8	3	4	5	9	2
3	5	2	6	9	7	1	8	4
9	4	7	1	6	2	8	3	5
8	2	3	7	5	9	6	4	1
6	1	5	4	8	3	9	2	7

3.

9	4	7	8	6	2	5	1	3
5	6	1	3	7	9	2	8	4
3	8	2	5	1	4	7	6	9
1	3	6	9	2	5	8	4	7
7	9	8	6	4	3	1	2	5
4	2	5	1	8	7	3	9	6
8	5	3	4	9	1	6	7	2
6	7	4	2	3	8	9	5	1
2	1	9	7	5	6	4	3	8

4.

6	9	5	1	2	3	8	7	4
7	1	4	5	8	6	3	2	9
3	8	2	9	4	7	5	1	6
9	2	7	6	1	2	4	8	5
2	5	8	3	7	4	6	9	1
1	4	6	8	5	9	2	3	7
5	3	1	7	6	8	9	4	2
8	2	7	4	9	5	1	6	3
4	6	9	2	3	1	7	5	8

5.

8	2	3	9	1	7	4	6	5
4	1	7	3	6	5	8	9	2
9	6	5	4	8	2	3	1	7
3	4	8	2	9	6	7	5	1
6	7	2	8	5	1	9	4	3
5	9	1	7	3	4	6	2	8
2	8	6	1	7	9	5	3	4
1	3	9	5	4	8	2	7	6
7	5	4	6	2	3	1	8	9

6.

5	4	1	2	8	6	9	3	7
6	8	7	3	9	5	2	1	4
3	2	9	7	4	1	5	6	8
1	7	8	9	3	2	6	4	5
4	9	6	5	1	7	3	8	2
2	3	5	8	6	4	1	7	9
9	6	3	4	5	8	7	2	1
7	5	4	1	2	3	8	9	6
8	1	2	6	7	9	4	5	3

7.

9	8	3	1	5	4	6	7	2
1	6	4	3	7	2	9	5	8
7	2	5	9	6	8	1	4	3
3	9	7	5	1	6	8	2	4
2	1	8	7	4	3	5	9	6
4	5	6	2	8	9	3	1	7
8	3	1	4	9	7	2	6	5
6	4	9	8	2	5	7	3	1
5	7	2	6	3	1	4	8	9

8.

4	6	8	9	2	1	7	5	3
7	2	1	6	3	5	9	8	4
3	5	9	8	4	7	1	2	6
8	1	3	5	6	4	2	9	7
6	4	2	7	1	9	5	3	8
9	7	5	3	8	2	6	4	1
5	3	7	4	9	6	8	1	2
1	9	4	2	7	8	3	6	5
2	8	6	1	5	3	4	7	9

RAZONA:

Instrucciones: completa los tableros subdivididos en 9 cuadrados llenando las celdas vacías con los números del 1 al 9, sin que se repita ninguna cifra, en cada fila, ni en cada columna, ni en cada cuadrado.

1.

				3	2		7	
2	4		5			3	1	
	8				6			
1		5		7			4	
4			9	1	5			3
	9			6		7		1
			3				6	
	3	4			1		8	2
	5		4	2				

2.

4					7	6		8
				9	8	3		
7	1		6		3			
9	6	1				8		
	7			8			9	
		3				5	7	6
			2		9		8	5
		7	4	6				
3		5	8					9

3.

2	3				1	6		
	9			3		7	5	1
		7			8			4
		8	7					
	6			4			1	
					2	5		
6			8			9		
4	7	1		6			3	
		5	4				7	6

4.

	4			8		3	9	
3				1	9			6
9			3		2			
	5	9				7		
4	7			9			2	5
		6				4	8	
			1		5			4
2			9	3				7
	3	4		2			5	

5.

8		4	2					7
						5		
	5		6	7	9			8
		8	9		4	1		3
		2		5		6		
4		6	8		1	7		
6			7	3	8		1	
		7						
1					2	9		6

6.

		6			4		3	8
	7	8		2	3			
1	4				8		9	
			2	4			8	
7				9				4
	8			3	7			
	5		4				7	3
			1	7		8	5	
2	1		3			4		

7.

	8				3	1		
			5			7		8
7	6		8					
1			9		5	3	7	
				4				
	3	5	6		7			9
					8		5	6
3		8			9			
		1	4				3	

8.

		4	3	8			7	
2		6			7	8		
	8						9	5
	2		8		3			6
1				6				3
5			7		1		2	
6	9						1	
		5	1			4		2
	7			2	5	3		

Respuestas:

1.

5	6	9	1	3	2	4	7	8
2	4	7	5	9	8	3	1	6
3	8	1	7	4	6	2	9	5
1	2	5	8	7	3	6	4	9
4	7	6	9	1	5	8	2	3
8	9	3	2	6	4	7	5	1
9	1	2	3	8	7	5	6	4
7	3	4	6	5	1	9	8	2
6	5	8	4	2	9	1	3	7

2.

4	3	9	5	2	7	6	1	8
6	5	2	1	9	8	3	4	7
7	1	8	6	4	3	9	5	2
9	6	1	7	5	2	8	3	4
5	7	4	3	8	6	2	9	1
2	8	3	9	1	4	5	7	6
1	4	6	2	3	9	7	8	5
8	9	7	4	6	5	1	2	3
3	2	5	8	7	1	4	6	9

3.

2	3	4	5	7	1	6	8	9
8	9	6	2	3	4	7	5	1
1	5	7	6	9	8	3	2	4
3	1	8	7	5	6	4	9	2
5	6	2	3	4	9	8	1	7
7	4	9	1	8	2	5	6	3
6	2	3	8	1	7	9	4	5
4	7	1	9	6	5	2	3	8
9	8	5	4	2	3	1	7	6

4.

5	4	1	6	8	7	3	9	2
3	8	2	4	1	9	5	7	6
9	6	7	3	5	2	1	4	8
8	5	9	2	4	6	7	1	3
4	7	3	8	9	1	6	2	5
1	2	6	5	7	3	4	8	9
7	9	8	1	6	5	2	3	4
2	1	5	9	3	4	8	6	7
6	3	4	7	2	8	9	5	1

5.

8	6	4	2	1	5	3	9	7
7	2	9	4	8	3	5	6	1
3	5	1	6	7	9	2	4	8
5	7	8	9	6	4	1	2	3
9	1	2	3	5	7	6	8	4
4	3	6	8	2	1	7	5	9
6	9	5	7	3	8	4	1	2
2	4	7	1	9	6	8	3	5
1	8	3	5	4	2	9	7	6

6.

9	2	6	7	1	4	5	3	8
5	7	8	9	2	3	6	4	1
1	4	3	6	5	8	2	9	7
3	9	1	2	4	6	7	8	5
7	6	5	8	9	1	3	2	4
4	8	2	5	3	7	9	1	6
8	5	9	4	6	2	1	7	3
6	3	4	1	7	9	8	5	2
2	1	7	3	8	5	4	6	9

7.

5	8	9	2	7	3	1	6	4
4	1	3	5	9	6	7	2	8
7	6	2	8	1	4	5	9	3
1	4	6	9	8	5	3	7	2
9	2	7	3	4	1	6	8	5
8	3	5	6	2	7	4	1	9
2	7	4	1	3	8	9	5	6
3	5	8	7	6	9	2	4	1
6	9	1	4	5	2	8	3	7

8.

9	5	4	3	8	6	2	7	1
2	1	6	5	9	7	8	3	4
3	8	7	2	1	4	6	9	5
7	2	9	8	5	3	1	4	6
1	4	8	9	6	2	7	5	3
5	6	3	7	4	1	9	2	8
6	9	2	4	3	8	5	1	7
8	3	5	1	7	9	4	6	2
4	7	1	6	2	5	3	8	9

RAZONA:

Instrucciones: completa los tableros subdivididos en 9 cuadrados llenando las celdas vacías con los números del 1 al 9, sin que se repita ninguna cifra, en cada fila, ni en cada columna, ni en cada cuadrado.

1.

5		9			4			
					1		7	9
			3			6		
7			6	3	5		8	2
	6			1			3	
2	9		8	4	7			1
		7			6			
9	4		5					
			4			3		5

2.

	2		4		6			8
		8			5	4		6
		6	2				9	
	4	9		7				5
6								7
1				5		8	6	
	9				4	7		
7		5	8			3		
2			7		9		5	

3.

			2	7		8		5
			6		8			2
								6
	7	6			2		8	1
	9		7		6		5	
5	3		9			6	7	
9								
6			8		9			
1		8		5	7			

4.

			5			3	2	
2		7		3	8	4		
6	3				4		8	
	5	1						4
	2			1			3	
3						8	1	
	7		6				4	3
		6	3	8		2		9
	1	3			2			

5.

	6			2			9	
		5		8		1		
		7	3	5	4	6		
	9			1			4	
	5		9		7		2	
	7			6			3	
		1	2	9	6	4		
		4		7		2		
	2			4			6	

6.

1	7			2		4		
		5					7	
2			4	7	1			
			2	3				6
3	2			5			4	1
9				1	4			
			7	8	6			9
	8					7		
		1		4			3	8

7.

5		6	9				8	2
4			6			1		
	9		5	8				3
						4	2	1
		1		5		9		
8	2	4						
9				2	7		1	
		8			5			6
2	1				9	8		7

8.

			9				5	3
			8	4		7		
7			2		3		9	
	4				7	1		5
		1		8		2		
9		7	1				6	
	7		6		4			2
		4		2	8			
3	6				9			

Respuestas:

1.

5	8	9	7	6	4	1	2	3
4	3	6	2	5	1	8	7	9
1	7	2	3	8	9	6	5	4
7	1	4	6	3	5	9	8	2
8	6	5	9	1	2	4	3	7
2	9	3	8	4	7	5	6	1
3	5	7	1	9	6	2	4	8
9	4	8	5	2	3	7	1	6
6	2	1	4	7	8	3	9	5

2.

5	2	3	4	9	6	1	7	8
9	7	8	3	1	5	4	2	6
4	1	6	2	8	7	5	9	3
8	4	9	6	7	3	2	1	5
6	5	2	1	4	8	9	3	7
1	3	7	9	5	2	8	6	4
3	9	1	5	6	4	7	8	2
7	6	5	8	2	1	3	4	9
2	8	4	7	3	9	6	5	1

3.

3	6	9	2	7	4	8	1	5
7	1	5	6	9	8	4	3	2
2	8	4	3	1	5	7	9	6
4	7	6	5	3	2	9	8	1
8	9	1	7	4	6	2	5	3
5	3	2	9	8	1	6	7	4
9	4	7	1	6	3	5	2	8
6	5	3	8	2	9	1	4	7
1	2	8	4	5	7	3	6	9

4.

1	8	4	5	6	9	3	2	7
2	9	7	1	3	8	4	5	6
6	3	5	2	7	4	9	8	1
7	5	1	8	2	3	6	9	4
4	2	8	9	1	6	7	3	5
3	6	9	4	5	7	8	1	2
8	7	2	6	9	5	1	4	3
5	4	6	3	8	1	2	7	9
9	1	3	7	4	2	5	6	8

5.

8	6	3	7	2	1	5	9	4
2	4	5	6	8	9	1	7	3
9	1	7	3	5	4	6	8	2
3	9	2	8	1	5	7	4	6
4	5	6	9	3	7	8	2	1
1	7	8	4	6	2	9	3	5
7	3	1	2	9	6	4	5	8
6	8	4	5	7	3	2	1	9
5	2	9	1	4	8	3	6	7

6.

1	7	9	8	2	5	4	6	3
8	4	5	3	6	9	1	7	2
2	6	3	4	7	1	9	8	5
4	1	7	2	3	8	5	9	6
3	2	6	9	5	7	8	4	1
9	5	8	6	1	4	3	2	7
5	3	4	7	8	6	2	1	9
6	8	2	1	9	3	7	5	4
7	9	1	5	4	2	6	3	8

7.

5	3	6	9	4	1	7	8	2
4	8	2	6	7	3	1	5	9
1	9	7	5	8	2	6	4	3
6	5	9	7	3	8	4	2	1
3	7	1	2	5	4	9	6	8
8	2	4	1	9	6	3	7	5
9	6	3	8	2	7	5	1	4
7	4	8	3	1	5	2	9	6
2	1	6	4	6	9	8	3	7

8.

4	2	8	9	7	1	6	5	3
6	9	3	8	4	5	7	2	1
7	1	5	2	6	3	4	9	8
2	4	6	3	9	7	1	8	5
5	3	1	4	8	6	2	7	9
9	8	7	1	5	2	3	6	4
8	7	9	6	3	4	5	1	2
1	5	4	7	2	8	9	3	6
3	6	2	5	1	9	8	4	7